*

Studier i semantikk og erkjennelsesteori

Del I

*

Morten Rognes

1978

*

"Alt som overhodet kan gjøres til gjenstand for vitenskapelig tenkning faller, så snart det er modent for teoridannelse, inn under den aksiomatiske metoden og derfor indirekte inn under matematikken."

David Hilbert

(Aksiomatishes Denken (1917))

INNHOLD

Forord **1**

Introduksjon ***3***

Introduksjon **4**

Kapittel I ***10***

Kapittel I **11**
§0 Teorien T:A 11

Kapittel II ***37***

Kapittel II **38**
§1 Innledning 38
§2 Teorien T:B 38
§3 Teorien T:C 47
§4 Teorien T:D 49
§5 Teorien T:A* 52
§6 Teorien T:B* 53
§7 Teorien T:C* 55
§8 Teorien T:D* 56

Kapittel III ***59***

Kapittel III **60**
§0 Innledning 60
§1 Om endel mengdeteoretiske begreper 60
§2 Syntaktiske begreper i forbindelse med intensjonale språkstrukturer 61
§3 Teoribegrepet 63
§4 Noen bemerkninger om første-ordens språk 68
§5 Tarskis teori om deduktive systemer 70

Kapittel IV ***73***

Kapittel IV **74**
§1 Konstruksjonssystemer og eksempler på formale språk 74
§2 Om den mengdeteoretiske basis i teoriene T:A – T:D, T:A* – T:D* 80
§3 Om utvidelser av teoriene i familien T:A – T:D* 82
§4 Modellteori for intensjonale språkstrukturer 83

Kapittel V ***88***

Kapittel V **89**
§1 Det kumulative hierarki 89
§2 Noen bemerkninger om "trancendente" entiteter 90
§3 Inter- og intraspråklig synonymitet 92
§4 Reduksjonsbegreper 93
§5 Noen spørsmål om konsistens 96
§6 Et identitetskriterium for mulige verdener 97
§7 To reduksjonspåstander og noen teoremer om formale språk 98

§8 Teorimangfoldet....102

Kapittel VI....108

Kapittel VI....109

§0 Innledende bemerkninger....109
§1 Oversikt over teoremer i T:A, T:C, T:A* og T:C*....109
§2 Teoremer i T:A, T:C, T:A* og T:C* i forbindelse med formale språk....117
§3 Oversikt over teoremer i forbindelse med teoriene T:B,T:D, T:B* og T:D*....123
§4 Teoremer i T:B, T:D, T:B* og T:D* i forbindelse med formale språk....132
§5 Sannhetsdefinisjoner for intensjonale språk....137
§5.1 Et elementært eksempel....137
§6 Sannhetsdefinisjon av L:A....139
§6.1 Konstantene i L:A....139
§6.2 Den formelle definisjonen av L:A....140
§6.3 Formell definisjon av T:A....141
§7 En metateori for T:A....141
§7.1 Definisjon av metateorien T:Am....142
§7.2 Teoremer i T:Am....142
§8 Noen flere betraktninger over T:Am....144

Kapittel VII....148

Kapittel VII....149

§1 Hierarkier av intensjonale objekter....149
§1.1 En rangordning av objektene i hierarkiet U....150
§1.2 Intensjonale objekter....150
§1.3 Det enkle typeteoretiske hierarki av attributter....152
§1.4 Det kumulative attributthierarki over området X....155
§1.5 Utvidelse av det intensjonale typteoretiske hierarki til transfinite nivåer....156
§2 Intensjonale språkstrukturer av orden w....157
§3 Ultraintensjonale objekter....168
§3.1 Hierarkier av ultraintensjonale objekter....168
§4 En avbildning av In inn i In:U....170
§5 Generalisering av logikken for intensjonale språk av orden w....171
§5.1 Andre type-systemer og høyere ordens språk....171
§6 Skisse til en attributt-teori basert på det rene kumulative attributthierarki....172
§6.1 Endel begrepsdannelser og teoremer i MZFC....176
§6.2 Noen avsluttende kommentarer til MZFC....178

Appendix I....180

§1 Innledning....181
§2 Første-ordens språket L:A....181
§2 Første-ordens teorien T:A....183
§3 Oversikt over enkelte komponenter, subteorier, i T:A....184

Appendix II....186

§1 Innledning....187
§2 Liste over ikke-logiske predikater i L:A:....187
§3 Begreper av relevans for påstander om tidsforhold, prosesser og hendelser i tid. 188
§4 Begreper av relevans for påstander om aksepterbarhet og evidens....189
§5 Begreper av relevans for viten og tro....189

§6 Begreper av relevans for påstander som har med kausalitet og årsaksforklaring å gjøre. 190
§7 Begreper av relevans for påstander om handling og etiske forhold....190

Appendix III....192
§1 Innledning....193
§2 Noen elementære satser om eksistensen av mengder....193
§3 Ordinaltall....197
§4 Om den transitive lukningen av en mengde....200
§5 Transfinit induksjon....206

Referanser....212

Referanser....213

Forord

Det forekommer meg som om klassen av alle første-ordens språk der predikatene er uttrykk som kan brukes i vanlig norsk tale er en ekstremt rik mengde med teorier. Ser man nå på delmengden av denne klassen som utelukkende inneholder teorier som har stor interesse fra en filosofisk synsvinkel synes det også nokså klart, men kanskje mindre opplagt, at denne klassen er meget rikholdig. Det er imidlertid en tese man må argumentere for. Den enkleste måten å gi belegg for den på synes å være å spesifisere, in concretio, første-ordens teorier hvor vokabularet inneholder predikater som utelukkende kan sies å være meningsfulle norske fraser og hvor teoriene ved nærmere inspeksjon må medgis å være genuint filosofisk pregede teorier. Dette er hva jeg har forsøkt å gjøre i den foreliggende avhandling. I Del I defineres en teorifamilie der hver teori i familien kan sies å være en omfattende teori om språk, mening, forholdet mellom språk og virkelighet, og forholdet mellom språklige uttrykk og ekstraspråklige størrelser som mulig verdener, mulige individer, utsagn, attributter, individuelle begreper og en rekke beslektede størrelser. Enn mer er teoriene teorier om sannhet, logisk konsekvens, logisk nødvendighet og logisk mulighet. Teoriene i familien er forholdsvis nær beslektet, men avviker fra hverandre på endel forholdsvis viktige punkter. I Del II utvides en av disse teoriene, som vi har gitt navnet T;A* til en mer omfattende teori av erkjennelsesteoretisk karakter. I denne mer omfattende teorien – som vi har valgt å kalle E2 – kan man bevise en rekke satser om prøvbarhet, evidens, aksepterbarhet ved utsagn og teorier, om forklaring og kausalnødvendighet for bare å nevne noen emner. Jeg har med E2 forsøkt å gi et eksempel på en teori som dekker vesentlige emner innenfor erkjennelsesteorien og semantikken. I visse henseende representerer teorien mitt eget forsøk på å lage en syntese av de mer fragmentariske teoriene som har blitt fremlagt på slike områder som modallogikk, kausallogikk, preferanselogikk, induktiv logikk og epistemisk logikk. Det må nevnes spesielt at jeg i denne forbindelse har hatt meget nytte av en lang rekke arbeider som har blitt skrevet av Dana Scott, Richard Montague, Jaakko Hintikka og G.H. von Wright for bare å nevne noen av de mest fremtredende navn.

Det som adskiller dette arbeidet fra mange andre avhandlinger i filosofi er dets sterkt formaliserte karakter, siden de teoriene jeg presenterer er formulert eksplisitt som første-ordens teorier. Dette har den fordel at de kan undersøkes med alle de eksakte midler av modellteoretisk og bevisteoretisk natur som man har til rådighet i moderne logikk og som man kan hente fra modellteorien, rekursjonsteorien, samt en lang rekke andre felter, spesielt det mangslungne og vidt forgrenede område som man kan kalle "intensjonal" logikk.

På mange måter står forfatteren utenfor og som tilskuer til de teoriene som presenteres i denne avhandlingen. På samme måte som kan forestille seg en mengdeteoretiker, som er skeptisk innstilt til eksistensen av la oss si visse ekstremt store kardinaltall, kan formulere og utvikle konsekvensene til systemer som postulerer eksistensen av slike tall selv om vedkommende er usikker på systemenes korrekthet - ja kan være smertelig oppmerksom på teorienes problematiske natur –; på lignende vis forholder jeg meg til de teoriene jeg her har introdusert, definert og beskrevet. Stiller man derfor alvorlige og inntrengende spørsmål om teorienes sannhetsverdi er det følgelig ikke enkelt for meg å gi noe tilfredsstillende svar. Jeg tror imidlertid at f.eks. en teori som E2, som presenteres i Del II, utgjør en kodifisering av et erkjennelsesteoretisk standpunkt som formelt sett er konsistent, og som ikke uten videre kan gjendrives på grunnlag av et sett med angivelig evidente påstander uten at det i høyeste grad kan diskuteres hvorvidt påstandene faktisk er evidente. Langt mer vesentlig synes det å være at et klarere syn på teorienes sannhetsverdi trolig bare kan oppnås ved en mer intensiv analyse og utvikling av deres konsekvenser. Jeg vil i andre arbeider forsøke å bidra til dette. Spesielt vil jeg gi bevis for at teoriene i Del I og Del II er konsistente relativt til det

mengdeteoretiske systemet ZFC, samt løse endel av de mest iøynefallende uavhengighetsproblemene som oppstår i forbindelse med teoriene.

Jeg håper at dette arbeidet kan være til en viss glede og berikelse for den som påtar seg det store strev som det vel må være å sette seg inn i det. Jeg er pinlig oppmerksom på at jeg ikke har skrevet noen god bok. Likevel kan det være mulig at dette arbeidet, til tross for alle sine lyter og skavanker, kan inspirere en og annen entusiast til egne tanker, at det kan åpne for nye muligheter for forskning og at det kan gi opphav til undersøkelser som avklarer den status de teoriene som vi innfører faktisk har. Det er også mitt håp at dette arbeidet blir oppfattet på en slik måte at man klart innser dets søkende og tentative natur. Jeg har ønsket å beskrive eksakt et knippe med forholdsvis omfattende teorier for derved, ved hjelp av allment aksepterte logiske metoder, å kunne utdype og få økt innsikt i strukturen til disse teoriene, samt de logiske relasjoner som består mellom dem. Dette er selvfølgelig ikke tilstrekkelig for å avgjøre sannhetsverdien til noen av dem. Det ville derfor være en grov misforståelse om noen trodde at jeg anså en eller annen av disse teoriene som definitivt riktig.

Morten Rognes

Introduksjon

Introduksjon

Det følgende essay er første del i et temmelig omfattende arbeid av logisk-filosofisk natur som forfatteren er i ferd med å utarbeide. Det er imidlertid en helt frittstående del. De teoriene vi vil betrakte i de senere delene vil i stor utstrekning bygge på det som presenteres i dette arbeidet. Mens vi her studerer visse temmelig omfattende semantisk-logiske teorier, vil vi på et senere stadium studere teorier som hører til metodelæren, erkjennelsesteorien og etikken. Vi vil også i senere deler utvikle konsekvensene av de teoriene som betraktes her i langt større grad.

Det foreliggende arbeid forutsetter at leseren har forholdsvis gode bakgrunnskunnskaper i moderne logikk. En bok som gir en utmerket oversikt og som omfatter alle de resultatene vi trenger her er f.eks. Shoenfields "Mathematical Logic". (Shoenfield [1]). Det er ikke nødvendig at leseren kjenner til alt i denne boken, men vedkommende bør ha forholdsvis god innsikt i de vesentlige resultatene om første-ordens logikk og mengdelære. Som en god og detaljert innføringsbok i mengdelære kan man nevne Takeuti & Zaring [1]. Det er imidlertid også heldig om leseren har en viss bakgrunn i modallogikk. En brukbar innføringsbok som kan nevnes i denne forbindelse er Hughes & Cresswell [1]. Det ville forøvrig også være en fordel om leseren hadde satt seg inn i endel av den viktigste litteraturen i modallogikk og beslektede emner. Vi vil da spesielt anbefale de artikler og verker som vi har oppført i referanselisten og som er skrevet av Kripke, Hintikka, Scott, Chellas og Montague. Det kan heller ikke være noen grunn til å skjule den dyptgripende innflytelse disse logikerne har hatt på forfatterens tenkning. Spesielt har Scott [1] vært av meget stor betydning for meg.

Jeg vil nå gi en generell oversikt over innholdet og strukturen i de påfølgende kapitler. Dernest vil jeg i noen grad kommentere den filosofiske betydning mitt arbeide har og i tillegg komme med visse andre bemerkninger om aspekter ved det.

I Kapittel I fremstiller vi en fullstendig formalisert første-ordens teori som vi har gitt det noe uopplysende, men teknisk sett nøytrale, navn T;A. Dette er en første-ordens teori i vanlig betydning; dvs. teorien er formulert i et første-ordens språk som vi kaller L;A hvis ikke-logiske predikater er oppført i en egen liste i Appendiks I. Formelt sett dreier det seg om en første-ordens teori uten funksjonsymboler, men med de vanlige logiske konnektivene og kvantorene. Siden det er en vanlig første-ordens teori kan aksiomene i teorien oppføres i to klasser: de ikke-logiske aksiomene og de logiske aksiomene. Som logiske aksiomer bruker vi et vanlig standard aksiomsett for første-ordens logikk (predikatlogikk). De ikke-logiske aksiomene innføres derimot i kapitlet gradvis, ledsaget av definisjoner og kommentarer. Disse aksiomene kan grovt inndeles i fire disjunkte klasser: (a) De "lingvistisk-syntaktiske aksiomene" som vi vil kalle dem. H1 – H12. (b) De mengdeteoretiske aksiomene A1 – A10. (c) De "ontologiske aksiomene", On1 – On10. (d) En klasse med aksiomer for det vi vil kalle "semi-formale" og formale språk. Det dreier seg her om et betraktelig antall. De betegnes med Sm1 – Sm26 og FSm1 – FSm14. Som man ser fra denne omtalen dreier det seg om en en temmelig omfattende teori av en forholdsvis kompleks natur. Man kan – og jeg tror dette vil fortone seg klart for leseren når vedkommende har studert teorien i detalj – karakterisere T;A som en fullstendig formalisert, generell semantisk logisk teori om språk, mening, referanse, sannhet, logisk sannhet, logisk mulighet og nødvendighet, logisk konsekvens, oversettelse, synonymitet, samt en teori om semantiske størrelser som mulige individer, mulige verdener, attributter, klasser, utsagn, teorier og formale systemer av forskjellig art. Teorien kan også karakteriseres som en generell teori om språk, naturlige språk såvel som formale språk av forskjellig art. Men det

må nevnes at teorien er forholdsvis svak angående hva den sier om ikke-formale, f.eks. naturlige språk. Blandt de uendelig mange setningene som kan formuleres i L;A, eventuelt utvidet med flere nye ikke-logiske predikater, er det bare en forholdsvis beskjeden del som avgjøres av teorien T;A. T;A er hovedsakelig en teori om språk av halv-formell og formell natur der språkene har en forholdsvis enkel grammatisk-syntaktisk natur. Vi anser ikke dette uten videre som noen svakhet siden språk av denne typen kan være umåtelig uttrykkskraftige.

I Kapittel II definerer vi en rekke modifikasjoner av teorien T;A. Vi beskriver først visse hovedvarianter T;B, T;C og T;D, der T;C fremkommer fra T;A ved e mindre substansiell forandring og hvor T;D er en modifikasjon av T;B som står i samme forhold til denne teorien som teorien T;C forholder seg til T;A. Vi beskriver dernest visse teorier T;A*, T;B*, T;C* og T;D* som fremkommer fra T;A – T;D ved å utvide de ontologiske aksiomene med visse antagelser om unormale verdener, og ved å modifisere de semantiske aksiomene i overens-stemmelse med dette. Ved å innføre unormale verdener i tillegg til de logisk mulige verdenene er det nødvendig å skille mellom to slag av semantiske størrelser. På den ene side det som kan kalles normale individuelle begreper, normale attributter av grad n ($n \geq 1$) og utsagn. Vi skal kalle entiteter av denne typen for *intensjonale* objekter. På den annen side får man det vi har valgt å kalle ultraindividuelle begreper, ultraattributter av grad n ($n \geq 1$) og ultrautsagn. De sistnevnte typer av objekter kaller vi i denne avhandlingen for *ultra-intensjonale* objekter. Hovedforskjellen mellom teoriene i familiene T;A – T;D og T;A* – T;D* er at de sistnevnte teoriene i tillegg til at de sier noe om intensjonale objekter også omtaler ultraintensjonale objekter. Ontologisk sett er de derfor adskillig mer spekulative. De nye teoriene defineres på en fullstendig rigorøs måte. Det bør bemerkes at teoriene i familien T;A – T;D strengt tatt er uforenlige med hverandre. Dette gjelder også teoriene i familien T;A* – T;D*. Dessuten er alle teoriene i familien T;A* – T;D* uforenlige med T;A – T;D under den forutsetning at det eksisterer unormale verdener. Det vanskelige og intrikate spørsmål om hvilke av alle disse teoriene som er korrekt om noen av dem i det hele tatt er det er derfor et spørsmål som man ikke så lett kommer utenom.

Som man ser har vi i kapittel I og II fremstilt en hel teorifamilie. Siden disse teoriene er svært omfattende og vi bare har gitt definisjoner av dem er det nødvendig å utlede teoremer slik at man kan danne seg et bedre bilde av hva teoriene sier og hva de ikke sier. Formålet med kapitlene III – VI er nettopp dette. På samme måte som en person vil være ute av stand til å se den virkelige betydningen til f.eks. Zermelo-Fraenkel-aksiomene for mengdelære om vedkommende bare blir presentert for dem alene og ikke i tillegg får se en stor del av det nettverk av teoremer som kan utledes fra dem pluss bevisene for disse er det med våre teorier. På lignende vis som en som studerer mengdelære bør få en viss innsikt i hvordan den elementære tallteori, analysen og de klassiske deler av læren om de transfinite tall kan utvikles innenfor rammen av Zermelo-Fraenkel systemet er det med studiet av teoriene T;A –T;D. En som får seg forelagt disse teoriene bør derfor også få et innblikk i hva som følger fra dem. Teorienes betydning fremgår ikke umiddelbart fra en oppramsing av de ikke-logiske aksiomene som inngår i dem.

Som nevnt inngår visse mengdeteoretiske aksiomer i T;A. Disse er forøvrig felles for alle teoriene og er et vanlig aksiomsett for Zermelo-Fraenkel mengdelære med utvalgsaksiom. I kapittel III kommenterer vi først endel tekniske detaljer angående bruken av mengdeabstraksjonstermer og vår bruk av mengdeteoretisk notasjon og terminologi. Vi introduserer så en rekke syntaktiske begreper i tilknytning til den typen språk og språklignende strukturer som teorien T;A uttaler seg om. Videre innfører vi her en rekke metodologisk sett viktige begreper som hva vi forstår med en teori, et formalt system, logisk sannhet og logisk konsekvens, samt en rekke andre begreper som trengs i denne forbindelse. Definisjonene er på dette punkt, som man kanskje kunne vente, standarddefinisjoner, men

ikke desto mindre strengt nødvendige for den systematiske utvikling av T:A. I kapittel IV utdyper vi den syntaktisk-lingvistiske delen av T;A og forklarer mer detaljert hvordan T;A – og forøvrig de andre teoriene i familien er relatert til hva vi man kan kalle abstrakt modellteori for intensjonale språk. Vi diskuterer også muligheten av å modifisere den mengde-teoretiske basis i teoriene slik at den tillater eksistensen av ikke-mengder eller det som også kalles for urindivider.

I kapittel V går vi et steg videre og diskuterer en del av konsekvensene av våre mengdeteoretiske aksiomer. Dette foregår imidlertid bare i den første delen av dette kapitlet. Hoveddelen består i å legge grunnlaget for en generell teori om intra- og interlingvistisk synonymitet og oversettelse for en stor klasse av språk. Det bør bemerkes at vi her bare innfører visse grunnleggende begreper og antagelser. Teorien kan på dette punkt videreutvikles adskillig. I tillegg bør det også nevnes at denne delen av teorien er mest fruktbar når det gjelder det vi kaller semiformale og formale språk. I dette kapitlet viser vi også en rekke satser om kardinaliteten til klassen av formale språk, klassen av deduktivt lukkede teorier i et formalt språk,klassen av teorier, klassen av utsagn samt en rekke andre kategorier av størrelser. Disse satsene har en viss metodologisk interesse og synes å være av grunnleggende betydning.

Kapittel VI inneholder en systematisk oversikt over en del svært viktige teoremer av semantisk karakter som kan utledes i teoriene T;A – T;D,T;A* –T:D*. I den siste delen av dette kapitlet viser vi også hvordan L;A kan defineres i T;A og følgelig hvordan T;A kan oppfattes som en teori som sier noe om seg selv. Vi beskriver også visse utvidelser av T;A som det er nærliggende å ta i betraktning i denne forbindelse.

I kapittel VII introduserer vi nok en serie med begrepsdannelser som vi anser for interessante og viktige. Vi definerer først det typeteoretiske intensjonale hierarki av orden *w*. Dernest viser vi hvordan dette er relatert til det enkle typeteoretiske hierarki av mengder. Vi studerer så forskjellige varianter av det intensjonale hierarkiet og ser på hvordan det kan utvides til transfinite nivåer. Det vi kaller for det intensjonale hierarki kan sies å være bygget opp ved hjelp av mulige individer og mulige verdener som grunnleggende byggestener. Utvider vi de mulige verdenene også med unormale verdener, er det naturlig å betrakte et "ultraintensjonalt" hierarki av orden *w* og forøvrig transfinite utvidelser av dette. Innenfor rammen av T;A er vi imidlertid ikke i stand til å gjøre dette. Begge hierarkityper kan imidlertid studeres innenfor rammen av teoriene T:A* – T;D*. I forbindelse med hierarkiene definerer vi en klasse med høyere ordens intensjonale språk og nevner en del satser i forbindelse med disse. Vi skisserer også i dette kapitlet grunntrekkene ved en generell attributt-teori, basert på et kumulativt hierarki av attributter. Denne attributt-teorien er bygd opp på en måte som er helt analog med ZFC og denne sistnevnte teori kan intepreteres inn i den.

Dette avslutter vår skisse av innholdet i det følgende arbeid.

Jeg vil nå forsøke å si noe om metoden i den foreliggende avhandling samt noe om mine grunnleggende synspunkter angående filosofisk metode. Det fore-kommer meg som om predikatet "x er en teori i språket y som er av filosofisk karakter" er meningsfullt selv om det selvfølgelig er vagt og det trolig kan være vanskelig å definere. Muligens er det helt fånyttes å søke etter en dekkende definisjon. Likeledes synes predikatene "x er en teori i språket y som har en rekke interessante filosofiske implikasjoner" og "x er en teori i språket y som hvis den er riktig gir et tilfredsstillende svar på en rekke filosofiske problemer" også å være meningsfulle selv om de også naturligvis er vage og kanskje umulige å definere på noen allment akseptabel måte. La oss forkorte konjunk-sjonen av disse tre betingelsene med uttrykket "C(x,y)". Det virker ikke da urimelig å si at man i filosofien er interessert i elementene i klassen Mg(x: C(x,y)), kanskje særlig om y er et svært uttrykkskraftig språk,

f.eks. et naturlig språk. La os nå forkorte predikatet "x er en sann teori i språket L" med "S(x,L)" og definere F;1(L) ved å sette F;1(L) = Mg(x: C(x,L) & S(x,L)). Igjen virker det ikke urimelig å si at en av hovedoppgavene i filosofien er å karakterisere klassen F;1(L) samt viktige delmengder av denne på en mest mulig opplysende måte så langt dette overhodet lar seg gjøre.

La L;r være det språket man får når man legger til de ikke-logiske predikatene i L;A de tre predikatene som ble spesifisert ovenfor. I L;r kan man formulere en rekke mer eller mindre interessante påstander om teorier x som oppfyller betingelsen "C(x,y)" for forskjellige språk y. Vi kan f.eks. formulere den følgende påstand (1) C(T;A, L;A) siden vi kan gi en presis definisjon av teorien T;A og språket L;A i L;r. Det forkommer meg som om denne setningen er sann i L;r ut fra den tilsiktede tolkningen av predikatene i L;r. Det samme gjelder om man i stedet for T;A bruker en av de andre teoriene i den teori-familien vi har omtalt: T;B – T;D,T;A* – T;D*. La oss nå gå et steg videre og innføre predikatet "x er en første-ordens teori i språket L", som vi for anled-ningen forkorter med "Ft(x,L)". Vi kan gi en helt rigorøs definisjon av dette predikatet i L;A. I T;A kan vi også faktisk bevise (2) Ft(T;A,L;A). Fra (1) og (2) følger at Mg(x: C(x,L;A) & FT(x,L;A))≠ø. Dette innebærer at det finnes teorier av filosofisk karakter, som videre har interessante filosofiske implikasjoner, og som hvis de er riktige gir tilfredsstillende svar på en rekke filosofiske problemer i språket L;A. Merk at intet av det som her er sagt impliserer at alle filosofisk interessante teorier er første-ordens teorier eller lar seg formulere eksplisitt innenfor en slik ramme. Det er sikkert temmelig tvilsomt om dette er tilfelle. Det vi derimot kan tenke oss å hevde er at G(L) = Mg(x: C(x,L) & Ft(x,L)) er en temmelig omfattende totalitet av teorier for rike første-ordens språk L og en mengde av teorier som det kan ha stor interesse å studere. La nå "FL" betegne klassen av alle første-ordens språk og definer G ved å sette G = UN/xêFL/(G(x)). Selv om G formodentlig er en temmelig rikholdig mengde med teorier virker den dog nokså restriktiv. Det er, som nevnt, ingen grunn såvidt jeg se, til å tro at enhver interessant filosofisk teori kan formalisere som en første-ordens teori eller reduseres til en teori av denne typen. Hvis dette faktisk er tilfelle ville det åpenbart være interessant. Det er muligens også riktig å si at ingen har gitt noen direkte formell gjendrivelse av denne påstanden. Men den kan knapt sies å være særlig innlysende og vi vil derfor ikke basere noen av våre resonnementer på denne antagelsen uten å gjøre uttrykkelig oppmerksom på det. Derimot kan vi ikke unnlate å omtale en muligens mer omfangsrik kategori av teorier enn G.

I kapittel IV definerer vi formelt sett eksakt en mengde med språk Sem(E;1,n;0) klassen av semiformale språk over uttrykksklasse E;1 og språket Norsk. Vi definerer også predikatet "Teori(L,x)" som innebærer at x er en teori l L. La oss definere "Tf(L)" ved Tf(L) = Mg(x: Teori(L,x) & C(x,L)). Teorimengden G;2 er nå definert ved:

G;2 = Mg(x: (EL)(xêTf(L) & L êSem(E;1,n;0)

G;2 omfatter klassen av alle første-ordens teorier i første-ordens språk som er med i Sem(E;1,n;0). Vi har derfor om Q = FLΩSem(E;1,n;0) at

UN/xêQ/(G(x)) Inkl G;2

Dette kan vi bevise i T;A. Derimot kan vi ikke gi noe strengt bevis for at

UN/xêQ/(G(x)) SInkl G;2

På samme måte som tidligere synes det rimelig å hevde at

T;A, ..., T;D,T;A*,...T;D* êG;2.

Men det bør bemerkes at vi ikke kan gi noe rigorøst bevis for dette selv om språket til T;A utvides til L;r.

G;2 synes å være et ekstremt rikt teorimangfold. Det er mulig å spesifisere helt eksakt diverse elementer i denne mengden. Videre er det mulig å bevise rigorøst resultater angående teoriene i G;2 og teoriene i mer spesielle delmengder av denne mengden. Det bør i denne forbindelse nevnes at f.eks. T;A er en teori som kan oppfattes som en teori om elementene i

Q = Mg(x: (EL)(Teori(L,x) & LêSEm(E;1,n;0))

Vår fremgangsmåte i det følgende kan beskrives slik: Vi vil forsøke å spesifisere en rekke teorier <T;j>/jêK/ der T;jêG;2. Når det gjelder disse teoriene er vi spesielt interessert i visse logiske aspekter. For det første vil vi forsøke å utvikle konsekvensene av dem så dypt som mulig. Mange av våre resultater vil derfor selvfølgelig være av typen "S er et teorem i T". Det er klart at vi selvfølgelig er ute etter ikke-trivielle konsekvenser av teoriene. For det andre vil vi studere forskjellige metalogiske egenskaper ved teoriene. Det er spesielt tre slike egenskaper som det er nærliggende å nevne i tilknytning til en teori T:

(a) Konsistensproblemet for T. I forbindelse med enhver av de teoriene vi studerer er vi interessert i om den er motsigelsesfri og om man kan bevise opplysende satser om dens motsigelsesfrihet. Slike bevis kan man stort sett bare regne med at kan være av en helt relativ natur. Man forsøker å vise at T er konsistent relativt til en annen teori som åpenbart synes å være av en mer elementær natur, eller som er slik at ingen som har arbeidet med teorien har noen mistanker eller grunnlag for å hevde at den inneholder motsigelser. I denne sammenheng er det ofte naturlig å betrakte forskjellige reduksjons- og intepretasjonsproblemer f.eks. om T kan reduseres til en mer elementær teori, eller om den kan intepreteres inn i teorier av en mer elementær art. Når det gjelder konsistensproblemet for en teori T er det også nærliggende å studere hvilke andre teorier den er forenelig med.

(b) Uavhengighetsproblemer i forbindelse med T. En teori T vil være formulert i et bestemt språk L;T som naturligvis kan være av forskjellig art alt ettersom hva slags teori det dreier seg om. I L;T vil det i mange tilfelle være en rekke setninger der hverken setningen selv eller negasjonen av den er noe teorem i T. Slike setninger kan vi kalle setninger i L;T som er uavhengige av T. Det kan ofte være av interesse å kjenne til de setningene i L;T, eller i det minste en del av dem, som er uavhengige av T Ofte vil også uavhengighetsbevis i tilknytning til en teori T ha en tendens til å kaste lys over teorien og bidra til en økt forståelse av den.

(c) Fullstendighetsproblemer i forbindelse med T. Er S en setning i L;T som er uavhengig av T oppstår problemet om man bør utvide T med S eller ¬S til en mer fullstendig teori T'. De fleste av de teorier som formuleres og undersøkes i denne avhandlingen vil være temmelig omfattende og formulert i svært uttrykksrike språk hvor f.eks. hele den elementære tallteori kan intepreteres på en troverdig måte. I lys av Gødels ufullstendighetsteorem vil disse teoriene derfor være "kronisk" ufullstendige. Dette utelukker ikke at det i visse tilfelle kan være av interesse å betrakte forskjellige måte å gjøre dem fullstendige på og vi vil følgelig også beskjeftige oss med problemer av denne typen.

La oss nå som avslutning nevne endel momenter angående T;A – T;D*.

I forbindelse med våre teorier har vi nevnt en rekke teoremer som er utledbare i dem. Vi har sjelden gitt detaljerte bevis for disse satsene. Det er hovedsakelig tre grunner til dette. For det første er endel av satsene av en forholdsvis elementær karakter og avhandlingen ville ha blitt uforholdsmessig lang om vi skulle ha tilveiebrakt detaljerte bevis. For det andre anser vi det som en god øvelse for leseren og sjekke en del av disse teoremene. Dette vil bidra til at vedkommende arbeider med teoriene og dermed på egenhånd får et bedre innblikk i innholdet til dem. For det tredje er vi her interessert i å gi en oversiktlig fremstilling av visse, i våre øyne, fundamentale antagelser og antagelseskomplekser. Fremstillingen ville ha blitt unødig langtekkelig og uoversiktlig om vi skulle ha gitt detaljerte bevis. Det bør dog understrekes at vi umiddelbart er villige til å gi et bevis om noen forlanger det.

Leseren bør altså huske at dette arbeidet har et noe begrenset formål, nemlig å fremstille så klart og eksplisitt om mulig visse fundamentale teorier og begreper for senere bruk og mer detaljerte studier. Det er altså bare en del av et større hele og er mer ment å ha karakter av en innførings- og oversiktstekst enn å være en drøftelse av de mer kompliserte tekniske detaljer som oppstår i de "høyere etasjer" av en sinnrik aksiomatisk lærebygning.

La oss helt tilslutt nevne at et av hovedmotivene bak det foreliggende arbeid er å utarbeide en ramme for logisk analyse av intensjonale, ikke-ekstensjonale konstruksjoner, og en generell teori om slike. Intensjonale konstruksjoner gjennomsyrer og syne å være et noe nært irredusibelt trekk ved all vår tale om forestilling, tenkning, tale, iaktagelse, handling, hensikt, følelser, beslutning, tro og viten –, kort sagt all vår tale som har med bevissthet og mental aktivitet å gjøre. Men også svært mange av nøkkelbegrepene i erkjennelses-teorien og etikken synes å være av denne typen. F. eks. synes en rekke av de begreper vi benytter i tilknytning til vår tale om disposisjoner, kausalitet, kausalnødvendighet, naturlover, handlingsalternativer og handlingsmuligheter bare å kunne uttrykkes ved språklige uttrykk som representerer konstruksjoner av intensjonal type. Det forkommer meg som om gode teorier de nevnte konstruksjoner bør sees i sammenheng med en mer omfattende teori om semantiske, ikke-ekstensjonale entiteter som f.eks. mulige individer, mulige verdener, attributter, begreper og utsagn. De teoriene vi nå etterhvert vil definere og undersøke kan sies å være av denne art.

Kapittel I

Kapittel I

§0 Teorien T:A.

I dette kapitlet vil vi gi en rigorøs beskrivelse av teorien T;A som vi bare omtalte i introduksjonsavsnittet. Som nevnt er T;A en første-ordens teori og den kan derfor defineres formelt sett helt presist ved at man angir (a) språket til teorien og (b) de logiske og ikke-logiske aksiomene i den, samt (c) slutnings-reglene.

La oss først ta for oss språket til teorien og definere dette presist. Vi skal kalle dette for L;A. Dette er et vanlig språk for første-ordens logikk med konstanter og predikater. Det bør imidlertid bemerkes at det ikke inneholder noen funksjonsymboler. Siden det er et vanlig første-ordens språk inneholder det de vanlige setningslogiske konnektivene "–>", "v", "&", "<–>", "¬" samt allkvantoren og eksistenskvantoren: "A" og "E". Videre inneholder språket en tellbart uendelig mengde med variabeltegn som vi skal anta at er: "x", "y", "z", "w", "x'", "y'",z'", "w'", "x'", "y'",.... . De symbolene som så langt er nevnt er de logiske symbolene i språket. Blandt predikatene i språket har man bare et som regnes som et logisk symbol, nemlig identitetspredikatet "=". Dette leses naturligvis "er identisk med".

I tillegg til disse logiske symbolene og predikatene inneholder også språket en rekke ikke-logiske predikater og konstanter. Vi vil ikke med en gang gi en fullstendig oversikt over disse predikatene og konstantene her, men innføre dem etterhvert som vi får behov for det. En samlet oversikt, samt definisjon av L;A, er gitt i Appendiks I. Leseren kan derfor finne en komplett liste over de ikke-logiske predikatene der. La oss imidlertid først betrakte de følgende ikke-logiske predikater som inngår i vokabularet til L;A:

(1) "x er en setning i språket y" – "Setn(x,y)"
(2) "x er et uttrykk i språket y" – "Expr(x,y)"
(3) "x er en konstruksjon i språket y" – "Konstr(x,y)"
(4) "Norsk" – "n;0"
(5) "x representerer et formalisert versjon av et fragment av språket y" – "Repfrag(x,y)"
(6) "x er et språk" – "Språk(x)"

Denne listen over ikke-logiske predikater og konstanter vil etterhvert bli utvidet med visse predikater og konstanter (17) – (59) som vil bli spesifisert senere. Språket til teorien T;A, L;A, kan derfor defineres som det første-ordenssspråket som utelukkende inneholder predikatene og konstantene (1) – (6) og (17) – (59) som ikke-logiske predikater og konstanter.

Vi bemerker at blandt predikatene er :

(39) "x er medlem av y" – "xêy"

Alle de vanlige mengdeteoretiske begrepene kan derfor defineres i L;A på velkjent måte ved hjelp av dette medlemskaps-predikatet.

Når det gjelder definisjoner av de mengdeteoretiske begrepee vi trenger nevner vi at vi bruker de definisjonene som gis i Kapittel 5 – 11 i Takeuti & Zaring [1]. Faktisk kan vi bruke deres definisjoner uten noen forandringer. I alle tilfelle er de definisjonene vi trenger av f.eks. de følgende begreper : ordnet par, funksjon, relasjon, snitt, union, komplement,

sekvens, naturlig tall, ordinaltall, kardinaltall etc. de vanlige standarddefinisjonene som gis i forbindelse med det mengdeteoretiske systemet ZFC.

Vi vil gi en mer detaljert redegjørelse for de mengdeteoretiske aksiomene som inngår som ikke-logiske aksiomer i teorien T;A litt senere. Derimot nevner vi på det nuværende trinn at de logiske aksiomene i T;A er et vanlig standardsett for predikatlogikk med identitet. Vi forutsetter at vi velger ut disse aksiomene slik at man bare trenger modus ponens (MP) og universell generalisering (UG) som slutningsregler. Disse slutningsreglene er derfor faktisk de eneste som inngår i teorien T;A.

I den delen av L;A som så langt har blitt spesifisert er det naturligvis mulig å spesifisere et utall av teorier som innbyrdes divergerer. Vi er imidlertid interessert i teorier som er intuitivt sett plausible utfra den tilsiktede betydning til predikatene (1) – (6), samt det mengdeteoretiske predikatet (39). Det er naturligvis en rekke setninger som sikkert umiddelbart vil bli regnet som plausible av de fleste, f.eks. setningen "¬Setn(n;0,n;0)" som uttrykker at norsk ikke er en setning i norsk. Eller, for å ta et annet eksempel, en setning som:

(Ax)(Språk(x) –> ¬(Ey)(Språk(y) & Setn(x,y)))

Som man ser sier denne setningen at et hvilket som helst språk ikke er noen setning i noe språk. Hvis man aksepterer at de nevnte predikatene (1) – (6) er meningsfulle virker det mildt sagt eiendommelig om man skulle benekte rimeligheten av en setning som denne. Disse to eksemplene er imidlertid ikke av noen spesielt stor teoretisk interesse. Det bør derfor bemerkes at vi er interessert i i setninger i L;A som representerer potensielt sanne og betydningsfulle innsikter. For å kunne formulere mer interessante teoretiske setninger i L;A definerer skal vi først definere det viktige predikatet "x er en intensjonal språkstruktur". Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 0.1x er en intensjonal språkstruktur, i symboler "IntS(x)", hvis og bare hvis x er en struktur

<Expr, Var, <P;<m,n,k>>/m,n,kêN/,<C;<m,n,k>>/m,n,kêN/,Tm,Fm>

som oppfyller de følgende krav:

(1) Var er en funksjon der Dom(Var) = N (N er mengden av de naturlige tall)

(2) Var er en-entydig

(3) Rgn(Var) Inkl Expr

(4) Er $ê P;<m,n,k>UC;<m,n,k> for noen m,n,kêN så er $ en funksjon der Dom($) = Expr^(m+n+k) og hvor Rgn($) Inkl Expr.

(5) Tm Inkl Expr og Fm Inkl Expr

(6) Vi krever at Rgn(Var) og de diverse Rgn($) for $êP;<m,n,k> der m,n,kêN samt de diverse Rgn($) der $êC;<m,n,k> for m,n,kêN utgjør en familie med disjunkte mengder.

(7) Er $êP;<m,n,k>UC;<m,n,k> for m,n,kêN og har man dessuten at x,yêExpr^(m+n+k) og at $(x)=$(y) så skal x=y.

(8) Vi krever at <Tm,Fm> skal være det paret <Z;1,Z;2> som er slik at Z;1 Inkl X og Z;2 Inkl Y for alle <X,Y>ê(Pt(Expr)XPt(Expr)) som oppfyller de følgende krav:

(i) (An)(nêN –> Var(n) Inkl X)

(ii) Er $êP;<m,n,k>, x;1,...,x;mêRgn(Var), x;1,...,x;m distinkte, t;1,...,t;nêX, F;1,...,F;kêY så er $(x,1,....,x;m,t;1,...,t;n,F;1,...,F;k)êY

(iii) Er $êC;<m,n,k>, x;1,...,x;mêRgn(Var), x;1,...,x;m distinkte, t;1,...,t;nêX, F;1,...,F;kêY så er $(x,1,....,x;m,t;1,...,t;n,F;1,...,F;k)êX

Dette avslutter definisjonen.

I tillegg til denne definisjonen trenger vi også den følgende definisjon:

Definisjon 0.2 La x =<Expr, Var, <P;<m,n,k>>/m,n,kêN/
,<C;<m,n,k>>/m,n,kêN/,Tm,Fm>
være en intensjonal språkstruktur. Da setter vi:

Expr(x) = Expr
Var(x) = Var
P;<m,n,k>(x) = P;<m,n,k> for m,n,kêN
C;<m,n,k>(x) = C;<m,n,k> for m,n,kêN
Tm(x) = Tm
Fm(x) = Fm

Det bør understrekes at vår definisjon av intensjonal språkstruktur i alt vesentlig er hentet fra Scott og Chellas. Man kan i denne forbindelse konsultere Scott [1] og Chellas [1].

Er L en intensjonal språkstruktur kaller vi Expr(L) for uttrykkene i L, Rgn(Var(L)) for variabeltegnene i L. P;<m,n,k> er de formeldannende konstruk-sjonene av type <m,n,k> i L, C;<m,n,k> er de termdannende konstruksjonene av type <m,n,k> i L. Tilslutt nevner vi at Tm(L) og Fm(L) er henholdvis termene i L og formlene i L.

La oss også bemerke at om x= <y;1,....,y;n> er et n-tuple så er (x);j = y;j for j=1,..,n. Mao. er (x);j den j'te koordinaten i tuplet x. Man har altså, om IntS(x), at

(x);1 = Expr(x)
(x);2 = Var(x)
(x);3 = <P;<m,n,k>>/m,n,kêN/
(x);4 = <C;<m,n,k>>/m,n,kêN/
(x);5 = Tm(x)
(x);6 = Fm(x).

For å kunne formulere endel teoretiske setninger i L;A på en presis måte trenger vi også den følgende definisjon av uttrykket "Variabeltegnet w fore-kommer fritt i uttrykket y i den intensjonale språkstrukturen z". Vi forkorter dette uttrykket med "Fri(w,y,z)". Definisjonen er denne:

Definisjon 0.3 Anta IntS(z) og at x= Var(z). Anta videre at yêTm(z)UFm(z). Da er Fri(w,y,z) definert induktivt på lengden av y på denne måten:

(i) Fri(x;k,x;j,z) hvis og bare hvis k=j
(ii) Anta m,n,kêN , $êC;<m,n,k>UP;<m,n,k>, t;1,...,t;nêTm(z), F;1,...,F;kêFm(z) og at a;1,...,a;m er m distinkte tall i N. Da setter vi: Fri(x;k, $(x;(a;1),...,x(a;m),t;1,...,t;n,F;1,...,F;k) hvis og bare hvis
(1) ¬(kê{a;1,...,a;m}) og
(2) (Es)(sê{1,...,n} & Fri(x;k,t;s,z)) v (Es)(sê{1,...,k} & Fri(x;k,F;s,z))

Definisjon 0.3 er naturligvis en induktiv definisjon. Det er imidlertid en rutinesak å omformulere denne definisjonen til en eksplisitt mengdeteoretisk definisjon. Vi bemerker også at alle de mengdeteoretiske begrepene som inngår i definiens i Definisjon 0.1 – 0.3 defineres på vanlig måte. "Pt(x)" betegner potensmengden til mengden x, "A^m" betegner A kryss-multiplisert med seg selv m ganger, dvs, A;1X ... X A;m der A=A;1A;=2 = ... =A;m. Videre betegner Rgn(f) verdiområdet til funksjonen f og Dom(f) er domenet til funksjonen f. Det bør også bemerkes at vi av og til skriver "f`x" istedet for "f(x)" om f er en

funksjon og xêDom(f). Begrepene som er introdusert ved definisjonene Definisjon 0.1 – 0.3 er altså rent mengdeteoretiske.

Definisjon 0.4 Anta IntS(z). Da setter vi:

(i) Fm;o(z) = Mg(y: yê Fm(z) & (Ek)(kêN & Fri(Var(k),y,z))
(ii) Tm;o(z) = Mg(y: yê Tm(z) & (Ek)(kêN & Fri(Var(k),y,z))
(iii) Fm;c(z) = Fm(z) – Fm;o(z)
(iv) Tm;c(z) = Tm(z) – Tm;o(z)

Er altså z en intensjonal språkstruktur så er Fm;o(z) og Tm;o(z) henholdsvis klassen av de åpne formlene og klassen av de åpne termene i z. Fm;c(z) og Tm;c(z) er tilsvarende henholdsvis klassen av alle de lukkede formlene og klassen av alle de lukkede termene i den intenjonale språkstrukturen z. Definisjon 0.4 er naturligvis også en rent mengde-teoretisk definisjon.

Vi kan nå formulere en del teoretiske prinsipper i den delen av språket til L;A som vi så langt har gjort rede for. Det er meningen at disse prinsippene skal inngå som ikke-logiske aksiomer i teorien T;A.

La oss først betrakte:

H1 Språk(y) & IntS(x) & Repfrag(x,y) –> Språk(<x,y>)

Denne setningen uttrykker at dersom y er et språk og x en intensjonal språk-struktur som representerer en formalisert versjon av et fragment av språket y så er det ordnete paret <x,y> selv et språk. Uttrykket "språk" er noe vagt. Den tolkningen av det som bør fastholdes i forbindelse med L;A bør imidlertid være vid slik at man ikke ved "språk" bare forstår naturlig talte språk, men også strukturer av språklignende karakter som ikke har noen direkte praktisk anvendelse. Man bør også være villig til å ta med språklignende strukturer som inneholder uttrykk som ikke anvendes i det daglige liv.

Det som vanligvis omtales som første-ordens språk kan oppfattes som en delmengde av klassen av alle intensjonale språkstrukturer. Betrakt nå det første-ordens språket som f.eks. inneholder nøyaktig de følgende ikke-logiske predikater og hvor det rent logiske vokabularet er som i forbindelse med L;A: "x er et hus", "x er en person", "x er et tidspunkt", "Tidspunktet x kommer før tidspunktet y", "x bor i huset y ved tidspunktet z". La oss kalle dette språket for s;0. Det er da meningen at relasjonen Repfrag må tolkes slik at s;0 representerer et fragment av Norsk, men f.eks. ikke av Engelsk. Erstattes de predikatkonstruk-sjonene som vi nevnte ovenfor med tilsvarende uttrykk i det engelske språk, og kaller vi det første-ordens språket som derved fremkommer for s;1, vil s;1 representere en formalisert versjon av et fragment av Engelsk, men selvfølgelig ikke av Norsk. Hvis man ikke har altfor fastlåste oppfatninger av hva et språk skal eller bør være behøver ikke H1 å virke anstøtelig, kanskje snarere tvert om.

H1 inngår som et ikke-logisk aksiom i T;A. Det gjør også de følgende to prinsipper:

H2 Språk(<x,y>) & IntS(x) & Språk(y) –> Repfrag(x,y)
H3 Språk(<x,y>) & IntS(x) & Språk(y) & IntS(z) –> ¬Repfrag(z,<x,y>)

Som man ser uttrykker H2 at dersom x er en intensjonal språkstruktur, y et eller annet språk og det ordnete paret <x,y> er et språk så må x representere en formalisert versjon av språket y. Det er mulig at denne setningen ikke er spesielt innlysende. Vi kan imidlertid ikke uten videre se at det finnes noen klare argumenter mot den og siden den passer rimelig bra sammen med de andre aksiomene vi skal betrakte inkluderer vi den tentativt blandt de ikke-

logiske aksiomene i T;A. H3 uttrykker at dersom <x,y> er et språk hvor x er en intensjonal språkstruktur og y et språk kan det ikke finnes noen intensjonal språkstruktur z som representerer en formalisert versjon av språket <x,y>.

På grunnlag av H1 – H3 kan man utlede følgende enkle sats:

Teorem 0.1 (a) Språk(y) & IntS(x) –> (Språk(<x,y>) <–> Repfrag(x,y))
(b) Språk(<x,y>) & IntS(x) & Språk(y) –>
¬(Ez)(Ew)(Språk(z) & IntS(w) & y=<w,z>)

Bevis: (a) er en triviell følge av H1 og H2. Når det gjelder (b), anta for reduktio ad absurdum at forutsetningene holder og at det finnes w,z slik at
(1) Språk(z) & IntS(w) & y=<w,z>.
Fra dette siste og H1 følger Språk(<z,w>). Fra forutsetningene og H2 følger (2) Repfrag(x,y). Fra dette og (1) kan man slutte: (3) Repfrag(x,<w,z>). Men fra forutsetningene i (b) har vi (4) Språk(<x,y>) & IntS(x) & Språk(y). Men sammen med den andre konjunkten i (1) og H3 impliserer dette ¬Repfrag(x,<w,z>). Dette strider åpenbart mot (3) **Q.E.D.**

Man kunne kalle <x,y> for et formalisert språk om y er et språk og x en intensjonal språkstruktur som representerer en formalisert versjon av et fragment av språket y. Tanken bak H2 og H3 kan da uttrykkes ved å si at ingen intensjonal språkstruktur kan representere en formalisert versjon av et formalisert språk. Formaliserte språk trenger så og si ingen formalisering. Det virker ikke urimelig å si at H2 og H3 representerer mer eller mindre vilkårlige konvensjoner angående bruken av predikatet "Repfrag". Siden dette predikatet er vagt synes det uungåelig at man må foreta noen slike bestemmelser om man ønsker å presentere en strukturellt sett presis formell teori.

La oss også anføre ytterligere noen kommentarer til H1. La m;0 være et språk som er nøyaktig som norsk, men der ordet "hus" betyr det samme som "hest" på norsk, dvs. i n;0 og hvor ordet "hest" i det nye språket m;0 har akkurat samme betydning som ordet "hus" har på norsk. Kort sagt er de to språkene m;0 og norsk, n;0, nøyaktig like unntatt ved det at betydningen til de to ordene "hus" og "hest" er byttet om. Anta nå at z er en intensjonal språkstruktur som inneholder de monadiske predikatene "x er et hus" og "x er en hest" og at z representerer en formalisert versjon av norsk. Det virker ikke da urimelig å si at z også må kunne representere en formalisert versjon av m;0. I lys av dette synes det pausibelt å si at en intensjonal språkstruktur i seg selv ikke utgjør noe språk, men bare i samband med en meningstilordner som tilordner de enkelte kon-struksjonene en mening, eller en størrelse med en lignende funksjon. Er nå z en intensjonal språkstruktur som representerer en formalisert versjon av et fragment av språket y så kan man tenke seg at selve språket y fungerer som en slik meningstilordner for språket z. Det er derfor ganske naturlig på bakgrunn av en slik tankegang å regne <z,y> for et språk, men ikke z isolert betraktet. Vi vil altså anse <z,n;0> og <z,m;0> som forskjellige språk. Man kunne kanskje også omtale m;0 og n;0 som "bakgrunnsspråk" for z. Som eksemplet ovenfor antyder virker det bare meningsfullt å tale om meningen til en konstruksjon i z relativt til en meningstilordner assoisert med z. I tilfellene gitt ovenfor fungerer "bakgrunnsspråkene" n;0 og m;0 som en slags meningstilordnere. I seg selv er en intensjonal språkstruktur bare en abstrakt mengde-teoretisk størrelse. Det er bare når den kommer "i kontakt" med et virkelig språk, eller på annen måte blir satt inn i en "livgivende" kontekst – som man sikkert bør tenke seg at består i et ytterst komplisert nettverk av sosiale samhandlinger og interaksjonsmønstre – at den får språk-karakter, og da bare relativt til denne konteksten.

Bemerkningene ovenfor er av en spekulativ og "uoffisiell" karakter og inngår selvfølgelig ikke i selve den formelle teorien T;A som vi nå er i ferd med å definere. Tanker av typen ovenfor synes ofte å uttrykkes slagordmessig ved å si at naturlige språk er mer "fundamentale" enn formale språk, eller ved at formale språk er "parasittiske" på naturlige språk. Dette er selvfølgelig i seg selv ytterst uklare teser. Men hvis det som er nevnt ovenfor er det som menes, kan det være en kjerne av sannhet i dem.

Vi har så langt bare nevnt en del – faktisk en liten del – av alle de ikke-logiske predikatene som inngår i språket L;A. Inntil nå har vi bare nevnt predikatene (1) – (6). For å få et språk i hvilket vi kan formulere flere teoretiske prinsipper skal vi utvide listen (1) – (6) med predikatkonstruksjonene (17) – (35) nedenfor. (17) – (35) er da naturligvis ikke-logiske predikater i L;A.

(17)	"x er en konstruksjon av type y i språket z"	– "KonTyp(x,y,z)"
(18)	"x er en konstruksjon av type y i språket z som er entydig med hensyn på grunnbetydning"	– "KonTypE(x,y,z)"
(19)	"x er en termdannende konstruksjon av type y i språket z"	– "TmKonTyp(x,y,z)"
(20)	"x er en formeldannende konstruksjon av type y i språket z"	– "FmKonTyp(x,y,z)"
(21)	"x er en termdannende konstruksjon av type y i språket z som er entydig med hensyn på grunnbetydning"	– "TmKonTypE(x,y,z)"
(22)	"x er en formeldannende konstruksjon av type y i språket z som er entydig med hensyn på grunnbetydning"	– "FmKonTypE(x,y,z)"
(23)	"x er en formel i språket y"	– "Form(x,y)"
(24)	"x er en term i språket y"	– "Tm(x,y)"
(25)	"x er en lukket term i språket y"	– "CTm(x,y)"
(26)	"x er en åpen term i språket y"	– "OTm(x,y)"
(27)	"x er en lukket formel i språket y"	– "CForm(x,y)"
(28)	"x er en åpen formel i språket y"	– "OForm(x,y)"
(29)	"x er en setning som er entydig med hensyn på grunnbetydning i språket y"	– "SetnE(x,y)"
(30)	"x er en formel i y som er entydig med hensyn på grunnbetydning"	– "FormE(x,y)"
(31)	"x er en term som i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning"	– "TmE(x,y)"
(32)	"x er en lukket term i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning"	– "CTmE(x,y)"
(33)	"x er en åpen term i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning"	– "OTm(x,y)"
(34)	"x er en lukket formel i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning"	– "CForm(x,y)"
(35)	"x er en åpen formel i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning"	– "OForm(x,y)"

Siden alle disse predikatene inngår i vokabularet til L;A som ikke-logiske, primitive, predikater er det klart at L;A er et meget rikt språk.

Vi er nå i stand til å formulere flere av de generelle teoretiske prinsippene som inngår som ikke-logiske aksiomer i T;A. Først nevner vi:

H4 (Språk(y) & IntS(x) & Repfrag(x,y) & m,n,kêN & z=<x,y>) –>
(i) FmKonTyp(v,<m,n,k>,z) <–> vêP;<m,n,k>(x)
(ii) TmKonTyp(v,<m,n,k>,z) <–> vêC;<m,n,k>(x)
(iii) Form(v,z) <–> vêFm(x)
(iv) Tm(v,z) <–> vêTm(x)
(v) KonTyp(v,<m,n,k>,z) <–> vêP;<m,n,k>(x)UC;<m,n,k>(x)
(vi) CForm(v,z) –> Form(v,z)
(vii) OForm(v,z) –> Form(v,z)
(viii) CTm(v,z) –> Tm(v,z)
(ix) OTm(v,z) –> Tm(v,z)
(x) FormE(v,z) –> Form(v,z)
(xi) CFormE(v,z) –> CForm(v,z)
(xii) TmE(v,z) –> Tm(v,z)
(xiii) CTmE(v,z) –> CTm(v,z)
(xiv) OTmE(v,z) –> OTm(v,z)
(xv) OFormE(v,z) –> OForm(v,z)
(xvi) KonTypE(v,<m,n,k>,z) –> KonTyp(v,<m,n,k>,z)
(xvii) TmKonTypE(v,<m,n,k>,z) –> TmKonTyp(v,<m,n,k>,z)
(xviii) FmKonTypE(v,<m,n,k>,z) –> FmKonTyp(v,<m,n,k>,z)
(xix) Konstr(v,z) <–>
(Em)(En)(Ek)(m,n,kêN & vêP;<m,n,k>(x)UC;<m,n,k>(x)

H4 er naturligvi et prinsipp av en temmelig triviell karakter. Dette oppdager man raskt når man studerer de enkelte klausulene nærmere. De fleste av formlene (i) – (xix) er umiddelbart sanne i kraft av den opplagt intenderte intepretasjon av predikatene (17) – (35). Man bør imidlertid merke seg forutsetningen i H4. Ingenting er sagt om at konstruksjoner av typen <m,n,k> finnes i vilkårlige språk, eller f.eks. språket norsk.

I tillegg til H4 oppfører vi også eksplisitt det følgende aksiom.

H5 IntS(x) & m,n,kêN –>
(i) FmKonTyp(v,<m,n,k>,x) <–> vêP;<m,n,k>(x)
(ii) TmKonTyp(v,<m,n,k>,x) <–> vêC;<m,n,k>(x)
(iii) Form(v,x) <–> vêFm(x)
(iv) Tm(v,x) <–> vêTm(x)
(v) KonTyp(v,<m,n,k>,x) <–> vêP;<m,n,k>(x)UC;<m,n,k>(x)

H5 synes å være såpass opplagt at det skulle være unødvendig med mer uttfyllende kommentarer.

H6 IntS(x) –>
(i) CForm(y,x) <–> yêFm;c(x)
(ii) OForm(y,x) <–> yêFm;o(x)
(iii) CTm(y,x) <–> yêTm;c(x)
(iv) OTm(y,x) <–> yêTm;o(x)

Også H6 er temmelig opplagt og neppe kontroversielt om man anser de primitive predikatene som vi så langt har nevnt som meningsfulle. Det samme skulle gjelde;

H7 (Språk(y) & IntS(z) &Repfrag(z,y) & x= <z,y>) –>
(i) CForm(v,x) <–> vêFm;c(z)
(ii) OForm(v,x) <–> vêFm;o(z)
(iii) CTm(v,x) <–> vêTm;c(z)
(iv) OTm(v,x) <–> vêTm;o(z)

Så langt har vårt språk, dvs. det språket vi har formulert H1 – H7 i , vært det første-ordens språket som har (1) – (6), samt (17) – (35) som primitive, ikke-logiske predikater. I L;A skal vi imidlertid også inkludere en rekke primitive konstanter. Det dreier seg om:

(36) a, b, c, ... , å
(37) A, B, C, ..., Å
(38) (,), !, ?, , , ' , . , *

Den intenderte tolkningen av disse konstantene er som følger: "a" betegner den første bokstaven i det norske alfabetet av små latinske bokstaver, "b" betegner den andre bokstaven i dette alfabetet, slik forsetter man frem til "å" som når denne bokstaven brukes som en konstant i L;A er ment å betegne den siste bokstaven i det norske alfabet av latinske bokstaver. Det er altså slik at de bokstavene som er nevnt ved (36) brukes autonymt, dvs. til å betegne seg selv når de figurerer som konstanter i L;A. Det samme gjelder "A", "B",...., "Å". Brukt som konstanter i L;A er det meningen at de skal refere til seg selv. Med andre ord er referansen til "A" oppfattet som en konstant i L;A nettopp det første tegnet som er plaasert til høyre for "(37)" ovenfor. Dette gjelder også tegnene "(", ")", "!", "?", ",", """, "." og "*". Brukt som konstanter i L;A betegner de seg selv bortsett fra "*" som er ment å skulle betegne mellomromstegnet. Det bør understrekes at uttrykkene (36) – (38) er primitive begreper i L;A og at vi ikke her vil forsøke å gi noen definisjon av dem.

Vi introduserer mengdene e;1, e;2 og e;3 ved den følgende definisjon:

Definisjon 0.5 (a) e;1 = {a, b, ..., å}
(b) e;2 = {A, B, ... , Å}
(c) e;3 = { (,), ?, , ,',., *}

Den følgende antagelse virker i våre øyne rimelig i lys av den tilsiktede tolkningen av konstantene som ble nevnt i forbindelse med (36) – (38). Setningen inkluderes som et ikke-logisk aksiom i T;A:

H8 (Ax)(xêUN/i,1,3/(e;i) –> Expr(x,n;0).

Setningen sier, som man ser, at alle tegnene i e;1, e;2 og e;3 er uttrykk i Norsk.

La oss videre definere klassen av alle endelige sekvenser, Seq, slik:

Definisjon 0.6 Seq = Mg(x: Func(x) & (Ey)(yêN & Dom(x) = Mg(z: zêN &z<y))

Som man ser er klassen av sekvenser klassen av alle de funksjoner x der vi har at domenet er alle de naturlige tallene opp til et bestemt naturlig tall y.

Vi definerer videre:

Definisjon 0.7E1 = SN(Mg(Z: UN/i,1,3/(e;i)) Inkl Z &
(As)(sêSeq &Rgn(s) Inkl Z –> sêZ)))

E;1 er altså i følge denne definisjonen den minste mengden Z som inneholder UN/i,1,3/(e;i) og som er slik at hvis s er en endelig sekvens der verdiområdet er inkludert i Z så er også s selv med i Z. At elementene i E;1 kan kalles uttrykk i Norsk virker rimelig. Vi inkluderer derfor den følgende formel som et ikke-logisk aksiom i T;A:

H9 (Ax)(xêE;1 –> Expr(x,n;0).

I forbindelse med endelige sekvenser finner vi det formålstjenelig å innføre visse hjelpebegreper:

Definisjon 0.8 Er xêSeq setter vi:

$$lh(x) = Max(Dom(x)) +1$$

lh(x) er følgelig lengden til sekvensen x. Man har naturligvis at lh(x)êN om xêSeq. Vi definerer en sammensetningsoperasjon mellom endelige sekvenser som vi betegner med " _ " på følgende måte:

Definisjon 0.9 Er x,y êSeq setter vi:

$$x_y = (iz)(Func(z) \,\&\, Dom(z) = Mg(w: wêN \,\&\, w<(lh(x) + lh(y))) \,\&\, Rest(z, Dom(x)) = x \,\&\, (Am)(mêDom(z) - Dom(x) \rightarrow z(m) = y(m-lh(x))))$$

x_y er med andre ord sammensetningen av sekvensene x og y. Er f.eks.

x= {<0,a;0>, <1,a;1>, ..., <m,a;m>} og

y = {<0,b;0>, <1,a;1>, ..., <n,b;m>} der n,m≥0 har man at

x_y = {<0,a;0>, <1,a;1>, ..., <m,a;m>, <m+1,b;0>, <m+2,a;1>, ..., <m+(n+1),b;m>}

Videre ser man lett at hvis xêSeq og lh(x) = n og man setter per definisjon π;x(m) = {<m,x(m)>} for 0≤m<n så har man at:

(+) x = π;x(0)_π;x(1)_ ..... _ π;x(n-1).

Siden operasjonen _ åpenbart er assosiativ kan man sløyfe parantesene og skrive "x_y_z" istedet for "(x_y)_z". Forøvrig skulle det være klart at _ ikke er noen kommutativ operasjon.

Vi skal benytte oss av de følgende konvensjoner i forbindelse med sekvensene i E;1. Enhver sekvens i denne mengden kan skrives på standardformen angitt ved (+). La oss se på et eksempel. La s;0 være sekvensen som oppfyller de følgende krav: (i) lh(s;0)=3 og (ii) s;0(0) = A s;0(1) = B og s;0(2) =C Vi har med andre ord at (++) s;0 = {<0,A>}_{<1,B>}_{<2,C>}. Vi vil da i stedet for det kompliserte uttrykket som befinner seg til høyre for identitetstegnet i (++) rett og slett skrive "ABC". Denne konvensjonen vil vi bruke sålenge vi arbeider med sekvenser i E;1. I tillegg vil vi tillate oss, når vi skriver tegnsekvenser på denne måten å bruke et mellomromstegn i stedet for "*". Dette innebærer at vi istedet for å skrive f.eks. "AB*C" skriver "AB C". Med disse konvensjonene vi uttrykket "Været var svært vakkert i Konstantinopel." betegne en sekvens x;0êE;1 der vi for eksempel har at lh(x;0) = 40, videre at x;0(6) = *, x;0(10) =* og x;0(11) =s.

Disse konvensjonene sparer en for en mengde skrivearbeid og har derfor delvis en rent tegnøkonomisk funksjon. I tillegg til dette letter de forståeligheten betraktelig.

I det følgende trenger vi også en hjelpefunksjon v;n : E;1 –> E;1. Denne er definert induktivt på følgende måte:

Definisjon 0.10 Anta xêE;1. Da er v;n induktivt definert på nêN ved:

(i) v;0(x)=x

(ii) v;(n+1)(x) = v;n(x)_'

(Mao. har man at v,(n+1)(x) = v;n_{<0,'>})

Vi definerer så :

Definisjon 0.11 Var;0 = Mg(<n, v;n({<0,x>})>: nêN)

Fra denne definisjonen følger at:

Var;0(0) = x
Var;0(1) = x'
Var;0(2) = x"
Var;0(3) = x'" osv.

Vi skal bruke Rgn(Var;0) for å representere variabeltegnene i visse intensjonale språkstrukturer som vi snart skal beskrive. La oss i mellomtiden bemerke at det skulle være klart fra den intenderte intepretasjonen av konstantene (36) – (38) at disse refererer til distinkte objekter. Det følgende ikke-logiske aksiom i T;A virker derfor svært plausibelt:

H10 Cd(e;1) = 29 & Cd(e;2) = 29 & Cd(e;3) = 9 & Cd(UN/i,1,3/(e;i)) = 66

Med andre ord inneholder e;1 nøyaktig 29 elementer, e;2 nøyaktig 29 elementer og e;3 nøyaktig 28 elementer. I alt vil da selvfølgelig UN/i,1,3/(e;i) inneholde 66 elementer. Merk at den siste konjunkten i H10 impliserer at de tre tegnmengdene e;1, e;2 og e;3 er disjunkte slik at man slipper å postulere dette separat i T;A. Det følger fra alt dette at A≠B, å ≠ c etc.

I det følgende trenger vi også denne definisjonen:

Definisjon 0.12 Med et konstruksjonssystem over paret <E;1, Var;0> forstår vi et par </P;<m,n,k>/m,n,kêN , /C;<m,n,k>/m,n,kêN> som oppfyller de følgende krav:

(i) Er m,n,kêN & $êP;<m,n,k>UC;<m,n,k> så har man at
Func($) & Dom($) = E;1^(m+n+k) & Rgn($) Inkl E;1

(ii) Rgn(Var;0) og de diverse Rgn($) for $êP;<m,n,k>UC;<m,n,k> der m,n,kêN utgjør en familie av innbyrdes disjunkte mengder.

(iii) Er $êP;<m,n,k>UC;<m,n,k> for noen m,n,kêN og har man at x,yêE;1^(m+n+k) & $(x) = S(y) så holder x=y

Det er nå mulig å bevise det følgende teorem:

Teorem 0.13 Er <Z;1,Z;2> et konstruksjonssystem over <E;1,Var;0> så finnes det en og bare et objekt x som er slik at x er en intensjonal språkstruktur, ie. hvor det er slik at Int(x) og som samtidig er slik at:

(i) (x);1 = E;1
(ii) (x):2 = Var;0
(iii) (x);3 = Z;1
(iv) (x);4 = Z;2

Vi skal ikke gi beviset for dette teoremet her, men overlater dette til leseren som en øvelse. Teorem 0.14 rettferdiggjør den følgende definisjon:

Definisjon 0.14 Er <Z;1,Z;2> et konstruksjonssystem over <E;1,Var;0> så setter vi L[Z;1,Z;2,E;1,Var;0] = (ix)(IntS(x) & (x);1 = E;1 &
(x):2 = Var;0 & (x);3 = Z;1& (x);4 = Z;2)

Et av våre mål nå er å definere forskjellige klasser av intensjonale språk-strukturer. Dette gjør vi ved å definere bestemte konstruksjonssystemer over <E;1, Var;0>. For dette formål er det hensiktsmessig å definere visse funksjoner A., A, E., E, ¬,&, v, –>, <–>, Nec, Pos, =, Eks, og i over E;1. Vi introduserer dem ved den følgende definisjon:

Definisjon 0.15 Anta x,yêE;1. Da setter vi:

(i) A.(x,y) = (For alle aktuelt eksisterende entiteter (x) er det slik at y)
(ii) A(x,y) = (For alle mulige entiteter (x) er det slik at y)
(iii) E.(x,y) = (Det finnes minst en aktuelt eksisterende entitet (x) slik at y)
(iv) E(x,y) = (Det finnes minst en entitet (x) slik at y)
(v) ¬(x) = (Det er ikke slik at (x))
(vi) &(x,y) = (Det er både slik at x og slik at y)
(vii) v(x,y) = (Det er enten slik at x eller slik at y)
(viii) –>(x,y) = (Hvis det er slik at x så er det slik at y)
(ix) <–>(x,y) = (Det er slik at x hvis og bare hvis det er slik at y)
(x) Nec(x) = (Det er logisk nødvendig at x)
(xi) Pos(x) = (Det er logisk mulig at x)
(xii) Eks(x) = ((x) eksisterer)
(xiii) =(x,y) = ((x) er identisk med (y))
(xiv) i(x,y) = (Det mulige individet (x) som er slik at y)

I forbindelse med denne definisjonen er det underforstått at A., A, E, E., i er binære funksjoner over E;1, videre at &, v, –>, <–>, = også er binære funksjoner over E;1 og at ¬, Nec, Pos og E er unære funksjoner over E;1. Videre gjør vi oppmerksom på at man må ha de konvensjonene som ble nevnt ovenfor om tegnsekvenser i tankene når man studerer definisjonen nærmere.

La oss definere et konkret konstruksjonssystem <X;0, Y;0> over <E;1,Var;0>:

Definisjon 0.16 Vi lar X;0, Y;0 være de to funksjonene som oppfyller de følgende krav:

(i) Dom(X;0) = Dom(Y;0) = N^3
(ii) X;0(<1,0,1>) = {A., A, E.,E}
(iii) X;0(<0,0,1>) = {¬, Nec, Pos}
(iv) X;0(<0,0,2>) = {v, –>, &, <–>}
(v) X;0(<0,2,0>) = {=}
(vi) X;0(<0,1,0>) = {Eks}
(vii) Y;0(<1,0,1>) = {i}
(viii) Er <m,n,k>ê(N^3 –{<1,0,1>,<0,0,1>,<0,0,2>,<0,2,0>,<0,1,0>}) så er X;0(<m,n,k>) = ø
(ix) Er <m,n,k>ê(N^3 – {<1,0,1>}) så er Y;0(<m,n,k>) = ø.

Det er nå forsåvidt lett å bevise den følgende sats:

Teorem 0.17 <X;0,Y;0> er et konstruksjonssystem over <E;1,Var;0>

Beviset består i å påvise at <X;0,Y;0> oppfyller kravene (i) – (iii) i Definisjon 0.12. Vi utelater beviset siden det er meget langtekkelig og kjedelig om det skal utføres helt detaljert.

Har man den tilsiktede tolkning av Repfrag i tankene virker det ikke urimelig å hevde at L[X;0,Y;0,E;1, Var;0] representerer et formalisert fragment av Norsk. Dette følger ikke fra noen av de aksiomene som så langt har blitt nevnt. Vi tar dette med som et ikke-logisk aksiom i T;A:

H11 Repfrag(L[X;0,Y;0,E;1,Var;0], n;0)

Når det gjelder relasjonen Repfrag synes det også mulig å argumentere for rimeligheten av det følgende generelle prinsipp som vi også inkluderer blandt de ikke-logiske aksiomene i T;A:

H12 [IntS(x) & IntS(y) & Exp(x) = Exp(y) & Var(x) = Var(y) &
(Am)(An)(Ak)(m,n,kêN –> ((x);3(m,n,k) Inkl (y);3(m,n,k)) &
(Am)(An)(Ak)(m,n,kêN –> (x);4(m,n,k) Inkl (y);4(m,n,k)] –>.
Repfrag(y,n;0) –> Repfrag(x,n;0)

H12 sier at dersom x og y er intensjonale språkstrukturer med samme uttrykk-smengde og de samme variabeltegn og det også er slik at konstruksjonssystemet i x er inkludert i konstruksjonssystemet til y så representerer x en formalisert versjon av Norsk dersom y også gjør dette.

La oss nå ta et overblikk: Vi har så langt angitt de "syntaktiske aksiomene" som inngår i teorien T;A. Som man forstår er dette setningene H1 – H12.

Imidlertid har vi ikke så langt sagt noe om de mengdeteoretiske aksiom-ene som inngår i denne teorien. Som nevnt tidligere inneholder L;A det men-gdeteoretiske predikatet "x er medlem av y", "xêy". Vi føyer dette til listen over ikke-logiske predikater i L;A som vi så langt har akkumulert:

(39) "x er medlem av y" – "xêy"

Det er nå på tide å si noe eksplisitt om vår bruk av mengdeteoretisk notasjon og terminologi, samt de aksiomene for ê-relasjonen vi tar med som ikke-logiske aksiomer.

Vi innfører *mengdeabstraksjonstermer* kontekstuelt. Er F en formel i L;A som inneholder mengdeabstraksjonstermer, dvs. termer av typen "Mg(x: G)" der G er en eller annen formel i L;A og x et variabeltegn, vil disse termene alltid forekomme i kontekster av typen F= Pt;1,...,t;n der P er et predikat og der t;i= Mg(x;k,G) for noe naturlig tall i og et eller annet variabeltegn x;k. Vi eliminerer da t;i ved å erstatte F med (Ex;j)((Ax;k)(x;kêx;j <–> G) & Pt;1,..,t;i-1,x;j,t;i+1,..,t;n). Her må man da huske på å velge variabeltegnet x;j slik at det ikke oppstår noen "kollisjon" med andre variabeltegn som forekommer i F; man kan fastsette den konvensjon at man alltid velger det variabeltegnet i denne forbindelse som alfabetisk sett er det første som kommer etter alle de variabeltegnene som forekommer i F.

En helt tilsvarende prosedyre brukes ved *beskrivelsestermer*. Er G= Pt;1,...,t;n der P er et primitivt predikat i L;A og t;i er en term av typen (ix,k)F elimineres t;i kontekstuelt ved å erstatte G med

(Ex;s)((Ax;k)(F <–> x;k=x;s) & Pt;1,...,t;i-1,x;s,t;i+1,...,t;n

Igjen må man velge x;s slik at det er det første variabeltegnet i rekken av variabel-tegn som kommer etter dem som forekommer i G. I en formel som inneholder en eller flere beskrivelsestermer og mengdeabstraksjonstermer kan man gjøre eliminasjonen av disse termene entydig ved å fastsette at man alltid starter med å eleminere beskrivelsestermene og fjerner disse suksesivt fra venstre mot høyre inntil det ikke er flere igjen. Hver gang etter

reglen ovenfor. Dernest tar man fatt på mengdeabstraksjonstermene og fjerner dem etter det samme mønster. Man ser altså at enhver formel som foruten primitiv notasjon inneholder mengdeabstraksjonstermer og beskrivelsestermer kan erstattes med en formel som bare inneholder primitiv notasjon.

Vi har inntil nå benyttet temmelig fritt en rekke mengdeteoretiske uttrykk, f.eks. <x,y>, Func(x), {x}, {x;1,....,x;n}, xΩy, Dom(x), Rgn(x), Seq, <, N osv. Så langt har vi ikke gitt noen eksplisitte definisjoner av disse uttrykkene. Dette "hullet" kan nå fylles igjen ved å gjøre oppmerksom på at vi bruker nøyaktig de definisjonene som er gitt i Kapittel 2, §1 – 8 i Drake[1] eller e ekvivalente definisjonene som er gitt i Kapittel 5 – 11 i Takeuti & Zaring [1]. Alle de begrepene vi i denne forbindelse har brukt og ikke uttrykkelig definert kan man finne definisjoner av i de to nevnte bøkene.

La oss nå angi de mengdeteoretiske aksiomene som inngår i teorien T;A. Dette er rett og slett aksiomene i systemet ZFC som er inngående beskrevet i de bøkene til f.eks. Drake og Takeuti. Selve systemet er velkjent og vil ikke bli drøftet utførlig akkurat på dette punkt. Her formulerer vi bare aksiomene fordi vi ønsker å være helt eksplisitte og fordi det kan være hensiktsmessig å ha dem samlet på et bestemt sted når man senere skal henvise til dem.

Den versjonen av ZFC som her vil bli benyttet har de følgende aksiomer:

A1 (Az)(zêx <–> zêy) –> x=y
A2 (Ey)(yêx) –> (Ey)(yêx & ¬(Ez)(zêx & zêy))
A3 (Ey)(Ax)(xêy <–> xêz & F)
Her forutsettes det at F er en formel i L;A og at variabeltegnet y ikke forekommer fritt i F
A4 (Ey) ¬(Ex)(xêy)

Vi kaller aksiomene A1 – A4 for henholdsvis ekstensjonalitetsaksiomet, fundierungsaksiomet, utsondringsaksiomet og nullmengdeaksiomet. A3, utsondringsaksiomet er strengt tatt ikke et aksiom, dvs. en enkelt formel i L:A, men et skjema. Den universelle lukningen av en hvilken som helst formel i L;A som man får ved å sette inn en L;A-formel for F i A3, som oppfyller det kravet som er nevnt, vil være et ikke-logisk aksiom i T;A. T;A er derfor en teori som strengt tatt inneholder uendelig mange aksiomer.

A5 (Ey)(Ax)(xêy <–> (x=z v x=w))
A6 (Ey)(Ax)(xêy <–> (Az)(zêx –> zêw))
A7 (Ey)(Ax)(xêy <–> (Ez)(xêz & zêw))
A8 (Ew)(øêw & (Ax)(xêw –> (Ez)(zêw & (Au)(uêz <–> (uêx v u=x)))))
A9 (Ax)(Ay)(Az)(F(x,y) & F(x,z) –> y=z)) –> (Eb)(Ay)(yêb <–> (Ex)(xêa & F(x,y)))
I forbindelse med dette aksiomskjemaet er det også en forutsetning at aog b er distinkte variabeltegn som ikke forkommer fri i F.

Vi omtaler A5 – A9 som hnholdsvis parmengde-aksiomet, potensmengde-aksiomet, sum-aksiomet og substitusjonsaksiomet, Substitusjonsaksiomet vil også bli omtalt som replacement-aksiomet. Dette er naturligvis et aksiomskjema. Strengt tatt er det derfor den univereselle lukningen av alle de formlene vi får når man setter inn en L;A-formel for F i A9 som regnes som ikke-logiske aksiomer i T;A.

I tillegg til A1 – A9 tar vi også med en versjon av utvalgsaksiomet som et ikke-logisk aksiom i T;A:

A10 (Ax)(xêz –> (x≠ø & (Ay)(yêz –> (xΩy=ø v x=y)))) –>

$$(Eu)(Ax)(Ev)(x\hat{e}z \rightarrow u\Omega z = \{v\})$$

Dermed har vi faktisk gitt en fullstendig oversikt over de rent mengdeteoretiske aksiomene i i teorien T;A.

Vi skal nå omtale ytterligere to klasser av aksiomer i teorien T;A. Det dreier seg om det vi vil kalle de "ontologiske" aksiomene og de "semantiske" aksiomene.

Predikatene (1) – (6) og (17) – (39) er bare en del av de primitive, ikke-logiske, predikatene i L;A. Føyer vi til de følgende predikater, nemlig (40) – (59) nedenfor, får vi en fullstendig liste over det ikke-logiske vokabularet til L;A:

(40)	"x er en mulig verden"	– "MV(x)"
(41)	"x er et mulig individ"	– "MI(x)"
(42)	"x eksisterer i verdenen y"	– "Eksi(x,y)"
(43)	"x er en ikke-eksisterende entitet"	– "Non(x)"
(44)	"x er den aktuelle verden"	– "Akt(x)"
(45)	"x er grunnbetydningen til y i z relativt til w og u"	– "GMen(x,y,z,w,u)"
(46)	"x er grunnbetydningen til y i z relativt til w"	– "GMen(x,y,z,w)"
(47)	"x er grunnbetydningen til y i z"	– "GMen(x,y,z)"
(48)	"x er meningen til y i z"	– "Men(x,y,z)"
(49)	"x er sann i y relativt til z og w"	– "Sann(x,y,z,w)"
(50)	"x er sann i y relativt til w"	– "Sann(x,y,w)"
(51)	"x er sann i y"	– "Sann(x,y)"
(52)	"x er ekstensjonen til y i z relativt til w og u"	– "Eksten(x,y,z,w,u)"
(53)	"x er ekstensjonen til y i z relativt til w"	– "Eksten(x,y,z,w)"
(54)	"x er ekstensjonen til y i z"	– "Eksten(x,y,z)"
(55)	"x er referansen til y i z relativt til w og u"	– "Ref(x,y,z,w,u)"
(56)	"x er referansen til y i z relativt til w"	– "Ref(x,y,z,w)"
(57)	"x er referansen til y i z"	– "Ref(x,y,z)"
(58)	"x er en verditilordning"	– "VTO(x)"
(59)	"x er en verditilordning over y"	– "VTO(x,y)"

La oss oppsummere: L:A er det førsteordens språket som har (1) – (6) og (17) – (59) som primitive ikke-logiske predikater og konstanter.

Uttrykkene (1) – (6), (17) – (38) vil bli omtalt som de "lingvistiske" predikatene i L;A. (39) skal vi kalle for det mengdeteoretiske predikatet i L;A. (40) – (44) vil vi omtale som de "ontologiske" predikatene i L;A og endelig skal vi kalle konstruksjonene (45) – (59) for de rent semantiske predikatene i L;A.

La oss nå nevne ytterligere noen setninger i L;A som inngår som ikke-logiske aksiomer i T;A:

On1	$(Ey)(Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow MV(x))$
On2	$(Ey)(Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow MI(x))$
On3	$(E!x)Akt(x)$
On4	$MV(x) \,\&\, Eksi(y,x) \rightarrow MI(y)$
On5	$(Ax)(Akt(x) \rightarrow MV(x))$
On6	$(Ey)(Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow Akt(x))$

On7 (E!x)Non(x)
On8 (Ey)(Ax)(xêy <–> Non(x))
On9 (Ax)(Non(x) –> ¬MI(x))
On10 MV(x) –> Mg(y: Eksi(y,x)) ≠ ø

På basis av den listen over predikater som har blitt gitt ovenfor skulle det ikke være så vanskelig å se hva setningene On1 – On10 sier. On1 uttrykker at det finnes en mengde som inneholder de og bare de ting som er mulige verdener. med andre ord at mengden Mg(x: MV(x)) eksisterer. Tilsvarende uttrykker On2 at mengden av mulige individer, Mg(x: MI(x)) eksisterer. On3 uttrykker at det finnes en og bare en ting som er den aktuelle verden og som det fremgår av On5 må dette objektet være en logisk mulig verden. On4 uttrykker at dersom x er en mulig verden og y er en eller annen entitet som eksisterer i denne verdenen så er y et logisk mulig individ. On6 uttrykker at det finnes en mengde som inneholder utelukkende den akstuelle verden. Sammen med On5 og On1 impliserer dette at mengden av mulige verdener er en ikke-tom mengde. On7 – On9 postulerer eksitensen av en ikke-eksisterende entitet som ikke er et mulig individ og at enhetsmengden som inneholder dette ikke-eksisterende individ finnes. Endelig uttrykker On10 at dersom x er en mulig verden er mengden av alle de individer som finnes i denne verdenen ikke-tom. Dette innebærer i lys av de andre aksiomene at mengden av mulige individer er ikke-tom.

Aksiomene ovenfor er forholdsvis svake. De gir en ikke noen holdepunkter for hvor mange mulige verdener og hvor mange mulige individer det finnes. Hvis man tar predikatet "mulig verden" alvorlig og finner On1 – On10 akseptable virker det imidlertid konsistent med en slik holdning å anta at Mg(x:MV(x)) er meget rikholdig og at den minst må være tellbart uendelig. Det samme gjelder selvfølgelig om klassen av mulige individer.

I forbindelse med de "ontologiske" aksiomene ovenfor innfører vi den følgende definisjon:

Definisjon 0.18
(i) a;0 = (ix)Akt(x)
(ii) * = (ix)Non(x)
(iii) D = Mg(x: MI(x))
(iv) I = Mg(x: MV(x))
(v) D;* = DU{*}
(vi) D;y = Mg(z: Eksi(z,y))

Som man ser fra denne definisjonen vil derfor "a;0" betegne den aktuelle verden, "*" betegner det ikke-eksisterende objektet, "D" betegner klassen av alle mulige entiteter, "I" betegner klassen av alle logisk mulige verdener, "D;*" betegner mengden av alle mulige individer utvidet med det ikke-eksisterende individ og endelig betegner "D;y" mengden av alle de mulige entiteter som eksisterer i verdenen y.

Før vi nå går videre til de semantiske aksiomene i teorien T;A finner vi det igjen hensiktsmessig å innføre noen hjelpebegreper. Vi definerer først "A^m" induktivt på den føgende måten:

Definisjon 0.19
(i) A^0 = ø
(ii) A^1 = A
(iii) A^(m+1) = (A^m)X A om m≥1

Som man ser er A^m mengden A kryssmultiplisert med seg selv m ganger. Vi skal også innføre den mer generelle notasjon "A^B" der A og B er vilkårlige mengder. "A^B" skal

betegne klassen av alle de funksjoner x som har mengde A som domene og som har sitt verdiområde inkludert i B. Den formelle definisjonen kan derfor formuleres slik:

Definisjon 0.20 A^B = Mg(x: Func(x) & Dom(x) = A & Rgn(x) Inkl B)

I stedet for å skrive "A^B" skal vi også, der det kan føre til litt mer oversiktlige formler, skrive Exp(A,B). Eksempelvis har man at (A^C)^B vil være klassen av alle funksjoner som avbilder mengden B inn i mengden av funksjoner i A^C.

Vi gjør på dette punkt også oppmerksom på at talltegnene "0", "1", "2", "3",... er definert på den følgende måte:

Definisjon 0.21
(i) 0 = ø
(ii) 1 = {0}
(iii) 2 = {0,1}
(iv) 3 = {0,1,2}
(v) n+1 = {0,1,2, ..., n}

Vi definerer altså de naturlige tallene på samme måte som von Neumann og har derfor at ethvert naturlig tall er identisk med klassen av sine forgjengere.

Med et semiformalt språk, eller halvformalt språk, forstår vi ethvert ordnet par <x,y> der y er et språk og x en intensjonal språkstruktur som representerer en formalisert versjon av et fragment av y. Vi bruker "SEMI(x)" som forkortelse for "x er et semiformalt språk" og definerer dette predikatet slik:

Definisjon 0.22 SEMI(x) <–> (Ey)(Ez)(Språk(y) &
IntS(z) & Repfrag(z,y) & x=<z,y>)

I lys av H1 har man åpenbart at (Ax)(SEMI(x) –> Språk(x)), med andre ord at ethvert semiformalt språk er et språk.

Med et semantisk utvetydig semiformalt språk forstår vi et semiformalt språk der alle de formel- og termdannende konstruksjonene i språket er entydige med hensyn på grunnbetydning. Vi bruker "SEMI;u(x)" som forkortelse for "x er et semiformalt semantisk utvetydig språk" og gir den følgende definisjon:

Definisjon 0.23 Vi setter at SEMI;u(x) hvis og bare hvis SEMI(x) og x oppfyller de følgende betingelser:
(i) (Am)(An)(Ak)(m,n,kêN –>
(Aw)(wê((x);1);3(m,n,k) –> FmKonTypE(w,<m,n,k>,x)))
(ii) (Am)(An)(Ak)(m,n,kêN –>
(Aw)(wê((x);1);4(m,n,k) –> TmKonTypE(w,<m,n,k>,x)))

Vårt neste mål er å formulere det vi vil kalle de "semantiske" aksiomene som inngår i teorien T;A. Det første av disse aksiomene er dette:

Sm1 SEMI;u(x) & m,n,kêN &
wê((x);1);3(m,n,k) v wê((x);1);4(m,n,k) –> (E!y)(GMen(y,w,x))

Denne setningen sier at dersom x er et semiformalt utvetydig språk og w er en formeldannende eller termdannende konstruksjon av typen <m,n,k> i x så finnes det en og

bare en entitet som er grunnbetydningen til konstruksjonen w i språket x. Denne setningen virker ikke urimelig om man har den definisjonen av utvetydig semiformalt språk i tankene som ble gitt ovenfor.

De to neste aksiomene er mer kompliserte og karakteriserer grunnbetydningen til henholdsvis formeldannende og termdannende konstruksjoner i det vi her kaller semantisk utvetydige semiformale språk. Det første er dette:

Sm2 SEMI;u(x) & m,n,kêN & wê((x);1);3(m,n,k) –>
(iy)(GMen(y,w,x)) ê (2^I)^(AX B)
der
(i) A= ((D;*)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

Dette aksiomet er ikke helt enkelt å lese. Man ser imidlertid at det uttrykker at dersom w er en formeldannende konstruksjon av typen <m,n,k> i det utvetydige semiformale språket x så er grunnbetydningen til w en funksjon i klassen (2^I)^(AX B) der A= ((D;*)^(D^m))^n og B= ((2^I)^(D^m))^k)

Sm3 SEMI;u(x) & m,n,kêN & wê((x);1);4(m,n,k) –>
(iy)(GMen(y,w,x)) ê ((D;*)^I)^(AX B)
der
(i) A= ((D;*)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

Dette aksiomet er helt analogt med Sm2, men angår, som man ser, term-dannende konstruksjoner av typen <m,n,k>.

Det neste aksiomet angår verditilordninger og kan oppfattes som en definisjon av hva som menes med en verditilordning i forbindelse med et utvetydig semiformalt språk x. En verditilordning for et slikt språk er alltid en funksjon som tilordner alle variabeltegnene i x elementer i klassen D, dvs. klassen av de mulige individene. I et semiformalt språk vil variabeltegnene være variabeltegnene i den første komponenten i språket – den intensjonale språkstrukturen – og derfor lik Rgn(Var((x);1)):

Sm4 SEMI;u(x) –> (VTO(z,x) <–> zêD^(Rgn(Var((x);1))))

Det to neste to aksiomene karakteriserer grunnbetydningen til termer i utvetydige semiformale språk:

Sm5 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêTm((x);1). –> (E!w)(GMen(w,y,x,z))

Som man ser uttrykker denne formelen at dersom x er et semiformalt utvetydig språk, z en verditilordning for x, og y en term i språket finnes det en og bare en entitet som er grunnbetydningen til denne termen i språket x relativt til verditilordningen z. Det neste aksiomet sier at denne grunnbetydningen er en funkjon i klassen (D;*)^I, altså en funksjon som tilordner enhver mulig verden et objekt i klassen av de mulige individene utvidet med det ikke-eksisterende objektet *:

Sm6 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêTm((x);1). –> (iw)(GMen(w,y,x,z))ê(D;*)^I

Vi trenger også to helt analoge aksiomer som på tilsvarende vis karakteriserer grunnbetydningen til formler. De kan formuleres slik:

Sm7 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêFm((x);1). –> (E!w)(GMen(w,y,x,z))

Sm8 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêFm((x);1). –> (iw)(GMen(w,y,x,z))ê(2^I)

Sm6 sier at grunnbetydningen til en formel y i et semiformalt utvetydig språk x relativt til en verditilordning z er en funksjon i klassen 2^I. I er mengden av de mulige verdnene og en funksjon i klassen 2^I tilordner derfor enhver mulig verden enten 0 eller 1. Den deler derfor denne klassen inn i to disjunkte mengder som samlet uttømmer I. Er fê2^I grunnbetydningen til en formel y i x relativt til en verditilordning z er det meningen at Mg(v: f(v) =1) skal representere mengden av alle de verdenene hvor utsagnet som uttrykkes av y er sant og at Mg(v: f(v)=0) skal representere mengden av alle de mulige verdnene hvor utsagnet som uttrykkes av y er usant.

Relativt til en verditilordning vil også variabeltegnene i et semiformalt utvetydig språk ha en bestemt grunnbetydning i følge teorien T;A. Den følgende formel sier hva denne er:

Sm9 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêRgn(Var((x);1)). –>
(iw)(GMen(w,y,x,z)) = Mg(<w,z(y)>: wêI)

Som det fremgår fra denne setningen postulerer altså teorien at grunn-betydningen til et variabeltegn i et semiformalt utvetydig språk er en konstantfunksjon som til enhver mulig verden tilordner et bestemt mulig individ, nemlig det individet som verditilordningen tilordner variabeltegnet.

For ytterligere å kunne formulere teoretiske prinsipper som inngår i T;A er det hensiktsmessig å innføre noen hjelpebegreper. Er v en funksjon er v(x/a), der x er et element i domenet til v, den funksjonen som er nøyaktig som v bortsett fra at den tilordner x elementet a. Tilsvarende om x;1,....,x;n er distinkte elementer i domenet til v. Da er v(x;1,...,x;n/a;1,...,a;n) den funksjonen som er nøyaktig som v bortsett fra at den eventuelt tilordner objektene x;1,...,x;n henholdsvis elementene a;1,...,a;n. Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 0.24 Har man Func(v) & xêDom(v) setter vi:
v(x/a) = (v–{<x,v(x)>})U{<x,a>}

Definisjon 0.25 Har man Func(v) & x;1,...,x;nêDom(v) setter vi:
v(x;1,...,x;n/a;1,...,a;n) =
(v– UN/i,1,n/({<x;i,v(x;i)>})) U UN/i,1,n/({<x;i,a;i>})

Vi innfører også funksjonsabstraksjonstermer av typen ∂x;1,...,x;nêq(t) der t og q er termer ved den følgende definisjon:

Definisjon 0.26 Anta t(x;1,...,x;n) er en term som inneholder x;1,...,x;n som fri variabler (x;1,...,x;n forutsettes å være distinkte) Da setter vi per definisjon:
∂x;1,...,x;nêy(t(x;1,...,x;n)) = Mg(<<x;1,...,x;n>, t(x;1,...,x;n)>: x;1,...,x;nêy)

I stedet for å bruke det mer kompliserte uttrykket "(iy)GMen(y,w,x)" skal vi bruke det kortere uttrykket "Me(w,x)" som forkortelse. En tilsvarende konvensjon innføres når det gjelder "(ir)GMen(r,y,x,z)" og "Me(y,x,z)". Vi gir de følgende formelle definisjoner:

Definisjon 0.27 Anta SEMI;u(x) Da setter vi Me(w,x) = (iy)GMen(y,w,x)

Tilsvarende:

Definisjon 0.28 Anta SEMI;u(x), og at VTO(z,x). Da setter vi:
Me(w,x,z) = (ir)GMen(r,w,x,z)

Begge disse definisjonene er ment som rene forkortningskonvensjoner. Merk at det ikke kan oppstå noen samrøring av notasjon på grunn av Definisjon 0.27 og Definisjon 0.28. Støter man på et uttrykk av typen "Me(w,x)" ser man umiddelbart at man må anvende Definisjon 0.27. Tilsvarende må man benytte Definisjon 0.28 i forbindelse med uttrykk av typen "Me(y,x,z)".

Vi er nå istand til å formulere et svært viktig prinsipp i teorien T;A. Det dreier seg om den følgende temmelig kompliserte setning:

Sm10 Er SEMI;u(x) & VTO(z,x) & $êP;<m,n,k>((x);1)UC;<mn,k>((x);1) og har man videre at

(i) m,n,kêN,
(ii) x;1,...,x;mêRgn(Var((x);1))
(iii) t;1,...,t;nêTm((x);1)
(iv) F;1, ... ,F;kêFm((x);1)

gjelder: Me($(x,1,...,x;m,t;1,...,t;n, F;1,...,F;k) ,x,z) =
∂wêI [Me($,x)(X;1(w),...,X;n(w),Y;1,...,Y;k)(w)]

der

Y;j = ∂a;1,....,a;nêD(Me(F;j,x,z(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m))) for jê{1,...,k} og
X;i(w) = [∂a;1,....,a;nêD(Me(t;i,x,z(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m))(w))] for iê{1, ...,n}

I forbindelse med X;i(w) må man huske på at
∂a;1,....,a;nêD(Me(t;i,x,z(x;1,...,x;n/a;1,...,a;n))(w))
er en funksjon som avbilder D^n inn i (D;*). Dette er fordi Me(t,x,v) om x er et semiformalt språk, t en term i dette og v en verditilordning for språket x, er en funksjon som avbilder I inn i D;*. Selv om Sm10 kan virke komplisert er det ikke så vanskelig å forstå som man skulle tro. Leseren oppfordres til å undersøke hva setningen sier i forskjellige tilfelle, f.eks. om $ er en formeldannende konstruksjon av type <0,2,0> i det semiformale språket x.

De følgende setninger i L;A tror jeg skulle virke forholdsvis rimelige utfra den intuitive tolkningen av de primitive predikatene i dette språket. De inkluderes som ikke-logiske aksiomer i T;A.

Sm11 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêI & wêFm((x);1) –>
(Sann(w,x,y,z) <–> Me(w,x,z)(y) =1)

Sm12 SEMI;u(x) & yêI & wêFm((x);1) –>
(Sann(w,x,y) <–> (Az)(VTO(z,x) –> Me(w,x,z)(y) =1))

Sm13 SEMI;u(x) & wêFm((x);1) –> (Sann(w,x) <–> Sann(w,x,a;0))

Vi fortsetter med følgende aksiomer som løper helt parallelt med Sm11 – Sm13 bortsett fra at det nå dreier seg ekstensjonen til en formel i et semiformalt språk:

Sm14 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêI & wêFm((x);1) –> .
(Eksten(Me(w,x,z)(y),w,x,y,z) & (E!u)(Eksten(u,w,x,y,z))

Sm15 SEMI;u(x) & yêI & wêFm;c((x);1) –> .
(Eksten(Me(w,x)(y),w,x,y) & (E!u)(Eksten(u,w,x,y))

Sm16 SEMI;u(x) & wêFm((x);1) –> .
(Eksten(Me(w,x)(a;0),w,x) & (E!u)(Eksten(u,w,x))

I forbindelse med "referansepredikatene" (55) – (57) betrakter vi de følgende prinsipper:

Sm17 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêI & wêTm((x);1) –> .
(Ref(Me(w,x,z)(y),w,x,y,z) & (E!u)(Ref(u,w,x,y,z))

Sm18 SEMI;u(x) & yêI & wêTm;c((x);1) –> .
(Ref(Me(w,x)(y),w,x,y) & (E!u)(Ref(u,w,x,y))

Sm19 SEMI;u(x) & wêFm((x);1) –> .
(Ref(Me(w,x)(a;0),w,x) & (E!u)(Ref(u,w,x))

Tilslutt nevner vi det følgende prinsipp som også kan virke rimelig:

Sm20 SEMI;u(x) & wêP;<0,n,0>((x);1) & nêN & yêI. –>
.(E!u)(Eksten(u,w,x,y)) & (Au)(Eksten(u,w,x,y) <–>
u= Mg(<x;1,...,x;n>: x;1,..,x;nêD;* & Me(w,x)(<x;1,...,x;n>)(y) =1)

Tidligere har vi definert størrelsene X;0, Y;0, samt L[X;0,Y;0, E;1,Var;0]. Man kan i denne forbindelse konsultere Definisjon 0.14 og Definisjon 0.15. Vi setter nå:

Definisjon 0.29 L;0 = L[X;0,Y;0, E;1,Var;0]

Tidligere har vi også definert uttrykket "Z er et konstruksjonssystem over <E;1,Var;0>. Det følgende er derfor bare en ren forkortningskonvensjon:

Definisjon 0.30 "KSys(Z,<E;1,Var;0>)" brukes som forkortelse for "Z er et konstruksjonssystem over <E;1,Var;0>".

Vi definerer inklusjon mellom konstruksjonssystemer på den følgende måte:

Definisjon 0.31 Anta Z;1 og Z;2 er konstruksjonssystemer over <E;1,Var;0>. Da setter vi:
Z;1 Inkl Z;2 <–>
(i) (Am)(An)(Ak)(m,n,kêN –> ((Z;1);1)(m,n,k) Inkl ((Z;2);1)(m,n,k)) og
(ii) (Am)(An)(Ak)(m,n,kêN –> ((Z;1);1)(m,n,k) Inkl ((Z;2);1)(m,n,k))

En utvidelse av L;0 er et semiformalt språk over Norsk, n;0, hvor konstruksjonssystemet inkluderer det til L;0. Formelt kan man definere predikatet "x er en utvidelse av L;0", "Utvid(L;0,x)" ved den følgende definisjon:

Definisjon 0.32 Utvid(L;0,x) <–>
(Ez)(IntS(z) & Repfrag(z,n;0) & x=<z,n;0> &
SEMI;u(x) & (Ey)(Ew)(z=L[y,w,E;1,Var;0] &
KSys(<y,w>,<E;1,Var;0>) & <X;0,Y;0> Inkl <y,w>))

På basis av denne definisjonen lar den følgende sats seg lett bevise:

Teorem 0.33 SEMI;u(<L;0,n;0>) –> (Ex)(Utvid(L;0,x))

Definisjon 0.34 Utvid(L;0) = Mg(x: Utvid(L;0,x))

Utvid(L;0) er altså mengden av alle utvidelser av L;0. La oss bemerke den følgende sats som lar seg bevise på grunnlag av de ikke-logiske aksiomene vi så langt har tatt med:

Teorem 0.35 Anta yêUtvid(L;0). Da gjelder:
(i) A.,A,E,E.êP;<1,0,1>((y);1)
(ii) ¬,Nec,Pos êP;<0,0,1>((y);1)
(iii) &,v, –>, <–> êP;<0,0,2>((y);1)
(iv) = êP;<0,2,0>((y);1)
(v) Eks êP;<0,1,0>((y);1)
(vi) i êC;<1,0,1>((y);1)
(vii) SEMI;u(y)

Det følgende knippe med aksiomer fastlegger betydningene til de konnektivene som er nevnt i Teorem 0.35 på vanlig standardmåte:

Sm21 (a) SEMI;u(<L;0,n;0>)
(b) xêUtvid(L;0) & yêI & Xê((2^I)^D) –>
(i) (Me(A.,x)(X)(y)) =1 <–> (Az)(zêD;y –> (X(z))(y) =1)
(ii) (Me(A,x)(X)(y)) =1 <–> (Az)(zêD –> (X(z))(y) =1)
(iii) (Me(E.,x)(X)(y)) =1 <–> (Ez)(zêD;y & (X(z))(y) =1)
(iv) (Me(E,x)(X)(y)) =1 <–> (Ez)(zêD & (X(z))(y) =1)

Sm22 xêUtvid(L;0) & yêI & Xê(2^I) –>
(i) (Me(¬,x)(X)(y)) =1 <–> X(y)=0
(ii) (Me(Nec,x)(X)(y)) =1 <–>(Aw)(wêI –> X(w)=0)
(iii) (Me(Pos,x)(X)(y)) =1 <–> (Ew)(wêI & X(w)=0)

Sm23 xêUtvid(L;0) & yêI & Xê(2^I) –>
(i) (Me(&,x)(X,Y)(y)) =1 <–> X(y) = Y(y)=1
(ii) (Me(v,x)(X,Y)(y)) =1 <–> (X(y) =1 v Y(y)=1)
(iii) (Me(–>,x)(X,Y)(y)) =1 <–> (X(y) =1 –> Y(y)=1)
(iv) (Me(<–>,x)(X,Y)(y)) =1 <–> (X(y) =1 <–> Y(y)=1)

Det følgende aksiomet fastlegger betydningen til identitetspredikatet "=":

Sm24 xêUtvid(L;0) & z,wêD & yêI –> ((Me(=,x)(z,w))(y)=1 <–> z=w)

Videre fastlegger det følgende aksiom betydningen til eksistenspredikatet Eks:

Sm25 xêUtvid(L;0) & zêD & yêI –> ((Me(Eks,x)(z))(y)=1 <–> zêD;y)

Endelig fastlegger den neste formlen i L;A betydningen til beskrivelsesoperatoren "i" :

Sm26 xêUtvid(L;0) & Xê((2^I)^D) & yêI. –>
(i) (E!u)(uêD & (X(u))(y) =1) –> (Me(i,x)(X))(y) = (iu)(uêD & (X(u))(y) =1)
(ii) ¬(E!u)(uêD & (X(u))(y) =1) –> (Me(i,x)(X))(y) = *

Vi har så langt presentert de prinsippene i teorien T;A som gir en informasjon om egenskapene til semiformale språk. Imidlertid inneholder teorien også noen prinsipper om det som her vil bli kalt rent formale språk. For å kunne formulere disse prinsippene konsist trenger vi imidlertid en del hjelpebegreper.

Definisjon 0.36 Vi setter, om m,n,kêN:
(a) Q1(m,n,k) = (2^I)^(AXB) der
(i) A= ((D;*)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)
(b) Q2(m,n,k) = ((D;*)^I)^(AXB) der
(i) A= ((D;*)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

Predikatet "y er en intepretasjon av den intensjonale språkstrukturen x" innføres så ved den følgende definisjon:

Definisjon 0.37 Vi sier at y er en intepretasjon for den intensjonale språkstrukturen x, i symboler, "Intepr(y,x)" hvis og bare y er en funksjon som oppfyller de følgende krav:
(i) Dom(y) = UN/m,n,kêN/(P;<m,n,k>(x)UC;<m,n,k>(x))
(ii) Er m,n,kêN & $êP;<m,n,k>(x) så gjelder y($)êQ1(m,n,k)
(iii) Er m,n,kêN & $êC;<m,n,k>(x) så gjelder y($)êQ2(m,n,k)

Definisjon 0.38 En verditilordning v for den intensjonale språkstrukturen x, i symboler "Vt(v,x)", er en funksjon som tilordner variabeltegnene i x elementer i D. Vi setter:
Vt(v,x) <–> (IntS(x) & vêD^(Rgn(Var(x)))

Den følgende definisjon er nå meget sentral:

Definisjon 0.39 Anta IntS(x) og at Vt(y,x) & Intepr(z,x), Da er ∏(y,x,z) den funksjonen der vi har:
(a) Dom(∏(y,x,z)) = Fm(x)UTm(x) og
(b) Rgn(∏(y,x,z)) Inkl (2^I)U((D;*)^I) og som er definert induktivt ved de følgende klausuler:
(i) (Au)(uêRgn(Var(x)) –> ∏(y,x,z)(u) = ∂wêI(y(u)))
(ii) Har man at:
(a) m,n,kêN,
(b) x;1,...,x;mêRgn(Var((x);1))

(c) t;1,...,t;nêTm((x);1)
(d) F;1, ... ,F;kêFm((x);1)
så er: (∏(y,x,z))($(x,1,...,x;m,t;1,...,t;n, F;1,...,F;k) =
∂wêI [z($)(X;1(w),...,X;n(w),Y;1,...,Y;k)(w)]

der
Y;j = ∂a;1,....,a;nêD(∏(y(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),x,z)(F;j)) for jê{1,...,k} og
X;i(w) = [∂a;1,....,a;nêD((∏(y(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),x,z)(t;i))(w))] for iê{1, ...,n}

Definisjon 0.39 bør sammenlignes med aksiom Sm10.

Vi bemerker at "Intepr(y,x)" og "∏(y,x,z)" er definert i rent mengdeteoretiske termer bortsett fra D og I. Som man husker ble disse uttrykkene definert ved D = Mg(x: MI(x)) og I = Mg(x: MV(x)). Vi har imidlertid ikke definert "MI(x)" og "MV(x)" utelukkende ved hjelp av rent logiske begreper og ê-relasjonen. Disse to predikatene er her innført som primitive. Det er derfor ikke slik at Intepr(x,y) og ∏(y,x,z) er rent mengdeteoretiske begreper.

Vi formulerer nok en rekke av setninger i L;A som ingår som ikke-logiske aksiomer i T;A. Først ser vi på:

FSm1 IntS(x) & Intepr(y,x) –> Språk(<y,x>)

Med et formalt språk vil vi her forstå nettopp et ordnet par <y,x> der x er en intensjonal språkstruktur og y er en intepretasjon av x. Dette begrepet kan sikkert defineres på en mer omfattende måte, men vi begrenser oss her til å bruke uttrykket om akkurat denne typen strukturer. Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 0.40 FORM(x) <–> (Ez)(Ew)(IntS(z) & Intepr(w,z) & x= <z,w>)

"FORM(x)" leses "x er et formalt språk". Som man ser er altså formale språk i denne forstand ordnete par der den første komponeneten er en intensjonal spåkstruktur og den andre komponenten er en intepretasjon av denne språkstrukturen.

Teorem 0.41 FORM(x) –> Språk(x)

Denne satsen er en triviell konsekvens av Definisjon 0.40 og FSm1.

Det følgende aksiom er langt, men egentlig temmelig trivielt:

FSm2 FORM(x) & m,n,kêN –>
(i) KonTyp(y,<m,n,k>,x) <–>
yêP;<n,m,k>((x);1)UC;<m,n,k>((x);1)
(ii) KonTypE(y,<m,n,k>,x) <–>
yêP;<n,m,k>((x);1)UC;<m,n,k>((x);1)
(iii) TmKonTyp(y,<m,nk>,x) <–> yêC;<m,n,k>((x);1)
(iv) FmKonTyp(y,<m,nk>,x) <–> yêP;<m,n,k>((x);1)
(v) TmKonTypE(y,<m,nk>,x) <–> yêC;<m,n,k>((x);1)
(vi) FmKonTypE(y,<m,nk>,x) <–> yêP;<m,n,k>((x);1)
(vii) Form(y,x) <–> yêFm((x);1)
(viii) Tm(y,x) <–> yêTm((x);1)
(ix) CTm(y,x) <–> yêTm;c((x);1)
(x) OTm(y,x) <–> yêTm;o((x);1)
(xi) CForm(y,x) <–> yêFm;c((x);1)

(xii) OForm(y,x) <–> yêFm;o((x);1)
(xiii) SetnE(y,x) <–> yêFm;c((x);1)
(xiv) FormE(y,x) <–> yêFm((x);1)
(xv) TmE(y,x) <–> yêTm((x);1)
(xvi) CTmE(y,x) <–> yêTm;c((x);1)
(xvii) OTmE(y,x) <–> yêTm;o((x);1)
(xviii) CFormE(y,x) <–> yêFm;c((x);1)
(xix) OFormE(y,x) <–> yêFm;o((x);1)

FSm3 FORM(x) & m,n,kêN & yêP;<m,n,k>((x);1)U C;<m,n,k>((x);1) –>
(E!u)(GMen(u,y,x)) & GMen((x);2(y), y,x)

FSm4 FORM(x) & Vt(z,(x);1) & yêI & wêFm((x);1) –>
Sann(w,x,y,z) <–> (∏(z,(x);1,(x);2)(w))(y) = 1

De følgende aksiomer er helt analoge med Sm11 – Sm20:

FSm5 FORM(x) & yêI & wêFm((x);1) –>
(Sann(w,x,y) <–> (Az)(Vt(z, (x);1) –> Sann(w,x,y,z)))

FSm6 FORM(x) & Vt(z,(x);1) & yêI & wêFm((x);1)UTm((x);1) –>
(E!u)(GMen(u,w,x,z)) & GMen(∏(z,(x);1,(x);2)(w),w,x,z)

FSm7 FORM(x) & wêFm((x);1) –> (Sann(w,x) <–> Sann(w,x,a;0))

De neste prinsippene fikserer betydningen til ekstensjonspredikatene i forbindelse med intensjonale språk.

FSm8 FORM(x) & Vt(z,(x);1) & yêI & wêFm((x);1) –>
(E!u)(Eksten(u,w,x,y,z) & Eksten((∏(z,(x);1,(x);2)(w))(y),w,x,y,z)

FSm9 FORM(x) & yêI & wêFm;c((x);1) –>
[(E!u)(Eksten(u,w,x,y)) & (Sann(w,x,y) –> Eksten(1,w,x,y))
&(¬Sann(w,x,y). –> Eksten(0,w,x,y))]

FSm10 FORM(x) & wêFm;c((x);1) –> (E!u)(Eksten(u,w,x)) &
(Au)(Eksten(u,w,x) <–> Eksten(u,w,x,a;0)))

La oss til slutt se på de referanseteoretiske aksiomene:

FSm11 FORM(x) & Vt(z,(x);1) & yêI & wêTm((x);1) –>
(E!u)(Ref(u,w,x,y,z)) & Ref((∏(z,(x);1,(x);2)(w))(y),w,x,y,z)

FSm12 FORM(x) & yêI & wêTm;c((x);1) –>
(Au)(Ref(u,w,x,y) <–> (Az)(Vt(z,(x);1) –> Ref(u,w,x,y,z)))

FSm13 FORM(x) & wêTm;c((x);1) –>
(Au)(Ref(u,w,x) <–> Ref(u,w,x,a;0))

FSm14 FORM(x) & wêP;<0,n,0>((x);1) & nêN & yêI –>.

(iu)Eksten(u,w,x,w) =
Mg(<x;1,...,x;n>: x;1,...,x;nêD & (((x);2)(w)(<x;1,....,x;n>))(y) =1)

Dette avslutter vår oversikt over de ikke-logiske aksiomene i T;A. Siden vi nå også har helt detaljert angitt det logiske og ikke-logiske vokabularet til språket L;A , samt angitt hvilke logiske aksiomer og slutningsregler vi ønsker å bruke er teorien T;A forsåvidt fullstendig definert.

Det bør bemerkes at hovedtanken bak Sm1 – Sm10, Definisjon 0.36 – 0.39 og FSm1 – FSm14 stammer fra Scott. I denne forbindelse kan man konsultere Scott[1]. En teori som ligner er også utarbeidet forholdsvis detaljert av Chellas i Chellas[1]. Imidlertid er ikke teorien ovenfor nøyaktig som Scott-Chellas-teorien, men avviker noe fra denne. Deres teori ligner mer på teorien T;C som vil bli definert i det neste kapitlet.

Vi vil omtale aksiomene FSm1 – FSm14 som de semantiske aksiomene for formale språk i T;A. Formlene Sm1 – Sm26 omtales som de semantiske aksiomene for semiformale språk. La oss også nevne at vi vil henvise til H1 – H12 som de syntaktisk-linvistiske aksiomene i T;A, On1 – On10 omtales som de ontologiske aksiomene i T;a og endelig kalles A1 – A10 for de mengdeteoretiske akiomene, eller ZFC-aksiomene i T;A.

Vi har nå gitt en helt detaljert, formell og fullstendig fremstilling av teorien T;A og kan avslutte dette kapitlet med den følgende, oppsummerende, definisjon:

Definisjon av T;A Teorien T;A er den førsteordens teorien hvis språk L;A er det første-ordensspråket som har som primitive predikater og konstanter uttrykkene spesifisert ved (1) – (6) og (17) – (59). De ikke-logiske aksiomene i T;A er de universelle lukningene av de følgende setninger i L;A: H1 – H12, A1 – A10, On1 – On10, Sm1 – Sm26 og endelig FSm1 – FSm14. De logiske aksiomene er et vanlig standard sett tilpasset det logiske vokabularet i L;A og hvor slutnings-reglene utelukkende er universell generalisering (UG) og modus ponens (MP).

I de neste kapitlene, særlig fra kapittel III og utover, skal vi mer utførlig kommentere og utdype denne teorien.

Kapittel II

Kapittel II

§1 Innledning

I dette kapitlet skal vi definere visse varianter av teorien T;A. Det dreier seg i første omgang om tre teorier som vi vil kalle T;B, T;C og T;D. Dernest vil vi se på en familie av teorier som svarer til T;A – T;D. Disse teoriene vil bli betegnet med T:A* – T;D*. Det som skiller de fire siste teoriene fra de fire første er at man i de siste teoriene innfører – i tillegg til det man kan kalle normale logisk mulige verdener – også "unormale"-verdener. En normal logisk mulig verden er intuitivt sett en verden der alle de vanlige logiske lovene gjelder. I en slik verden kan f,eks, ikke både en påstand og negasjonen av denne påstand være sann. I en unormal verden er det imidlertid ikke noe i veien for at dette kan være tilfelle. Valuasjonsreglene for de vanlige logiske konnektivene kan derfor være helt anderledes enn i normale verdener. Behovet for unormale verdener oppstår i forbindelse med den semantiske analysen av endel viktige intensjonale konstruksjoner som f.eks. "x tror at F", "x vet at F" i motsetning til en intensjonal konstruksjon av typen "Det er logisk nødvendig at F". I en setning av den sistnevnte type kan man erstatte F med en annen logisk ekvivalent setning G og få som resultat en ny setning med den samme sannhetsverdi. Dette er ikke uten videre tilfelle med de to førstnevnte konstruksjonene. Er F logisk ekvivalent med G og er det slik at x tror at F kan man ikke uten videre slutte at x tror at G. Grunnen kan rett å slett være at den logiske sammenhengen mellom F og G er så komplisert at x ikke greier å gjennomskue den. Det kan derfor faktisk i noen situasjoner være slik at individet x tror at F er tilfelle, men faktisk benekter at G er tilfelle. Vi skal vende tilbake til dette temaet når vi kommer til disse teoriene. La oss først gi en fremstilling av teorien T;B som kan oppfattes som en teori der man har revidert og nyansert visse grunnleggende antagelser i T;A.

§2 Teorien T:B

Teorien T;B vil være – som enhver førsteordens teori – fullstendig definert om man spesifiserer språket til teorien samt de ikke-logiske aksiomene i den. La oss derfor starte med å spesifisere språket til teorien T;B. Dette vil her bli betegnet med "L;B". Når det gjelder dette språket er det identisk med L;A bortsett fra at vi nå utvider L;A med de følgende to nye primitive predikater:

(60)	"y er en manifestasjon av det mulige individet x i verdenen w"	– "Man(y,x,w)"
(61)	"y er et mulig objekt"	– "Obj(x)"

L;B kan nå defineres ve å si at det er det første-ordens språket som har det samme rent logiske vokabular som L;A og hvor det ikke-logiske vokabularet inneholder predikatene (1) – (6), (17) – (59) som ble spesifisert i forrige kapittel, men som nå, i tillegg, inneholder de to predikatene (60) og (61) som ble nevnt rett ovenfor. Som man ser er derfor L;B et noe rikere språk enn L;A i og med at vi nå har muligheten for ikke bare å snakke om mulige individer, men også om manifestasjonene av et mulig individ i forskjellige verdener. (60) og (61) innføres som nye primitive predikater fordi det ikke uten videre er klart, gitt at de er meningsfulle, hvordan man skal kunne definere dem ved hjelp av de uttrykkene som inngår i L;A.

Vi har nå definert språket til teorien T;B. Det neste vi må gjøre er å gi en nøyaktig oversikt over definisjonene og de ikke-logiske aksiomene i denne teorien. Når det gjelder det første, definisjoner, skal vi adoptere definisjonene Definisjon 0.1 – Definisjon 0.24 som ble formulert i forrige kapittel. Når det gjelder aksiomene i T;B nevnervi først at formuleringene H1 – H12, samt de mengdeteoretiske aksiomene A1 – A10, også er ikke-logiske aksiomer i T;B. Det som derimot skiller T;B fra T;A er at de "ontologiske aksiomene" i T;A nå er erstattet med de følgende:

OnB1 (Ey)(Ax)(xêy <–> MV(x))
OnB2 (Ey)(Ax)(xêy <–> MI(x))
OnB3 (E!x)(Akt(x))
OnB4 (Ey)(Ax)(xêy <–> Akt(x))
OnB5 (Ax)(Akt(x) –> MV(x))
OnB6 (E!x)Non(x)
OnB7 (Ey)(Ax)(xêy <–> Non(x))
OnB8 MI(x) & MV(w) –> (E!y)(Man(y,x,w))
OnB9 ¬(Ex)(Obj(x) & MI(x))
OnB10 (Ax)(Non(x) –> ¬(Obj(x) v MI(x)))
OnB11 MI(x) & MV(w) –> (Man(y,x,w) –>Obj(y))
OnB12 Obj(x) –> (Ey)(Ew)(MI(y) & MV(w) & Man(x,y,w))
OnB13 (Ey)(Ax)(xêy <–> Obj(x))
OnB14 MI(x) & MI(y) –> (x=y <–>
(Aw)(MV(w) –> (iz)(Man(z,x,w)) = (iz)(M(z,y,w))))
OnB15 MV(w) & Eksi(y,w) –> Obj(y)
OnB16 (Ex)MI(x) & (Aw)(MV(w) –> (Ey)Eksi(y,w))
OnB17 MI(x) –> x= ∂wêI((iz)(Man(z,x,w))

Som man åpenbart ser er det flere "ontologiske aksiomer" i T;B enn i T;A. Det vesentlige nå er at man i T;B drar et skille mellom mulige individer og mulige objekter. Som man ser ved å gå igjennom fomellisten ovenfor er et mulig individ noe som kan manifestere seg på forskjellig vis når man beveger seg fra en verden til en annen. De enkelte manifestasjonene av et mulig individ i de enkelte mulige verdener er det som nå kalles objekter. Til ethvert mulig individ x vil det altså svare en funksjon, nemlig den funksjonen som til enhver mulig verden tilordner denne verden det objektet som er manifestasjonen av x i denne verden. Dette er hva man kunne kalle den individuerende funksjonen som svarer til det mulige individet x. Den individuerende funksjonen til et mulig individ vil altså være mengden av alle de ordnete par
<w, (iz)(Man(z,x,w)> der man har wêI. Som man ser er det kan to mulige individer kan ha individuerende funksjoner som stemmer overens i noen verdener, men divergerer i andre hvis den teorien som er angitt her legges til grunn.

Vi betegner mengden av alle objekter med "DD" og betegner denne mengden utvidet med det ikke-eksisterende objektet * med DD;*. Formelt kan disse to uttrykkene defineres slik:

Definisjon B0.25 Vi setter :
(i) DD = Mg(x: Obj(x))
(ii) DD;* = DD U{*}

Vi gir nå en liste over de semantiske postulatene i T;B:

SmB1 SEMI;u(x) & m,n,kêN &
wê((x);1);3(m,n,k) v wê((x);1);4(m,n,k) –> (E!y)(GMen(y,w,x))

Denne setningen sier at dersom x er et semiformalt utvetydig språk og w er en formeldannende eller termdannende konstruksjon av typen <m,n,k> i x så finnes det en og bare en entitet som er grunnbetydningen til konstruksjonen w i språket x. Denne setningen virker ikke urimelig om man har den definisjonen av utvetydig semiformalt språk i tankene som ble gitt ovenfor.

De to neste aksiomene er mer kompliserte og karakteriserer grunnbetydningen til henholdsvis formeldannende og termdannende konstruksjoner i det vi her kaller semantisk utvetydige semiformale språk i forbindelse med T;B. Det første er dette:

SmB2 SEMI;u(x) & m,n,kêN & wê((x);1);3(m,n,k) –>
(iy)(GMen(y,w,x)) ê (2^I)^(AX B)
der
(i) A= ((DD;*)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

Dette aksiomet er ikke helt enkelt å lese. Man ser imidlertid at det uttrykker at dersom w er en formeldannende konstruksjon av typen <m,n,k> i det utvetydige semiformale språket x så er grunnbetydningen til w en funksjon i klassen (2^I)^(AX B) der A= ((DD;*)^(D^m))^n og B= ((2^I)^(D^m))^k)

SmB3 SEMI;u(x) & m,n,kêN & wê((x);1);4(m,n,k) –>
(iy)(GMen(y,w,x)) ê ((DD;*)^I)^(AX B)
der
(i) A= ((DD;*)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

Dette aksiomet er helt analogt med SmB2, men angår som man ser term-dannende konstruksjoner av typen <m,n,k>.

Det neste aksiomet angår verditilordninger og kan oppfattes som en definisjon av hva som menes med en verditilordning i forbindelse med et utvetydig semiformalt språk x. Dette aksiomet er identisk med Sm4:

SmB4 SEMI;u(x) –> (VTO(z,x) <–> zêD^(Rgn(Var((x);1))))

Det to neste to aksiomene karakteriserer grunnbetydningen til termer i utvetydige semiformale språk:

SmB5 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêTm((x);1). –> (E!w)(GMen(w,y,x,z))

Som man ser uttrykker denne formelen at dersom x er et semiformalt utvetydig språk, z en verditilordning for x, og y en term i språket finnes det en og bare en entitet som er grunnbetydningen til denne termen i språket x relativt til verditilordningen z. Det neste aksiomet sier at denne grunnbetydningen er en funkjon i klassen (D;*)^I, altså en funksjon som tilordner enhver mulig verden et objekt i klassen av de mulige individene utvidet med det ikke-eksisterende objektet *:

SmB6 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêTm((x);1). –>
(iw)(GMen(w,y,x,z))ê(DD;*)^I

Man bør i forbindelse med SmB6 merke seg forskjellen mellom dette og Sm6
Vi trenger også to helt analoge aksiomer som på tilsvarende vis karakteriserer grunnbetydningen til formler. De kan formuleres slik:

SmB7 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêFm((x);1). –> (E!w)(GMen(w,y,x,z))

SmB8 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêFm((x);1). –> (iw)(GMen(w,y,x,z))ê(2^I)

SmB8 sier at grunnbetydningen til en formel y i et semiformalt utvetydig språk x relativt til en verditilordning z er en funksjon i klassen 2^I. I er mengden av de mulige verdnene og en funksjon i klassen 2^I tilordner derfor enhver mulig verden enten 0 eller 1. Den deler derfor denne klassen inn i to disjunkte mengder som samlet uttømmer I. Er fê2^I grunnbetydningen til en formel y i x relativt til en verditilordning z er det meningen at Mg(v: f(v) =1) skal representere mengden av alle de verdenene hvor utsagnet som uttrykkes av y er sant og at Mg(v: f(v)=0) skal representere mengden av alle de mulige verdnene hvor utsagnet som uttrykkes av y er usant.

Relativt til en verditilordning vil også variabeltegnene i et semiformalt utvetydig språk ha en bestemt grunnbetydning i følge teorien T;B. Den følgende formel sier hva denne er:

SmB9 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêRgn(Var((x);1)). –>
(iw)(GMen(w,y,x,z)) = z(y)

Som det fremgår fra denne setningen postulerer altså teorien T;B at grunn-betydningen til et variabeltegn i et semiformalt utvetydig språk er det mulige individet som verditilordningen tilordner variabeltegnet. Man bør i denne forbindelse merke seg forskjellen mellom Sm9 og SmB9.

Den følgende setning er et svært viktig prinsipp i teorien T;B på samme måte som i T;A. Det dreier seg om den følgende temmelig kompliserte setning:

SmB10 Er SEMI;u(x) & VTO(z,x) & $êP;<m,n,k>((x);1)UC;<mn,k>((x);1) og har man videre at

(i) m,n,kêN,
(ii) x;1,...,x;mêRgn(Var((x);1))
(iii) t;1,...,t;nêTm((x);1)
(iv) F;1, ... ,F;kêFm((x);1)

gjelder: Me($(x,1,...,x;m,t;1,...,t;n, F;1,...,F;k),x,z) =
∂wêI [Me($,x)(X;1(w),...,X;n(w),Y;1,...,Y;k)(w)]

der

Y;j = ∂a;1,....,a;nêD(Me(F;j,x,z(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m))) for jê{1,...,k} og
X;i(w) = [∂a;1,....,a;nêD(Me(t;i,x,z(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m))(w))] for iê{1, ...,n}

I forbindelse med X;i(w) må man huske på at
∂a;1,....,a;nêD(Me(t;i,x,z(x;1,...,x;n/a;1,...,a;n))(w))
er en funksjon som avbilder D^n inn i (D;*). Dette er fordi Me(t,x,v) om x er et semiformalt språk, t en term i dette og v en verditilordning for språket x, er en funksjon som

avbilder I inn i D;*. Selvom SmB10 kan virke komplisert er det ikke så vanskelig å forstå som man skulle tro. Leseren oppfordres til å undersøke hva setningen sier i forskjellige tilfelle, f.eks. om $ er en formeldannende konstruksjon av type <0,2,0> i det semiformale språket x.

De følgende setninger i L;A tror jeg skulle virke forholdsvis rimelige utfra den intuitive tolkningen av de primitive predikatene i dette språket. De inkluderes som ikke-logiske aksiomer i T;A.

SmB11 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêI & wêFm((x);1) –>
(Sann(w,x,y,z) <–> Me(w,x,z)(y) =1)

SmB12 SEMI;u(x) & yêI & wêFm((x);1) –>
(Sann(w,x,y) <–> (Az)(VTO(z,x) –> Me(w,x,z)(y) =1))

SmB13 SEMI;u(x) & wêFm((x);1) –> (Sann(w,x) <–> Sann(w,x,a;0))

Vi fortsetter med følgende aksiomer som løper helt parallelt med SmB11 – SmB13 bortsett fra at det nå dreier seg ekstensjonen tile en formel i et semiformalt språk:

SmB14 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêI & wêFm((x);1) –> .
(Eksten(Me(w,x,z)(y),w,x,y,z) & (E!u)(Eksten(u,w,x,y,z))

SmB15 SEMI;u(x) & yêI & wêFm;c((x);1) –> .
(Eksten(Me(w,x)(y),w,x,y) & (E!u)(Eksten(u,w,x,y))

SmB16 SEMI;u(x) & wêFm((x);1) –> .
(Eksten(Me(w,x)(a;0),w,x) & (E!u)(Eksten(u,w,x))

I forbindelse med "referansepredikatene" (55) – (57) betrakter vi de følgende prinsipper:

SmB17 SEMI;u(x) & VTO(z,x) & yêI & wêTm((x);1) –> .
(Ref(Me(w,x,z)(y),w,x,y,z) & (E!u)(Ref(u,w,x,y,z))

SmB18 SEMI;u(x) & yêI & wêTm;c((x);1) –> .
(Ref(Me(w,x)(y),w,x,y) & (E!u)(Ref(u,w,x,y))

SmB19 SEMI;u(x) & wêFm((x);1) –> .
(Ref(Me(w,x)(a;0),w,x) & (E!u)(Ref(u,w,x))

Tilslutt nevner vi det følgende prinsipp som også kan virke rimelig:

SmB20 SEMI;u(x) & wêP;<m,n,k>((x);1) & nêN & yêI. –>
.(E!u)(Eksten(u,w,x,y)) & (Au)(Eksten(u,w,x,y) <–>
u= Mg(<x;1,...,x;n>: x;1,..,x;nêDD;* & Me(w,x)(<x;1,...,x;n>)(y) =1)

Mengden av alle de objekter som eksisterer i verdenen y betegner vi med "DD;y". Videre definerer vi nå D;y ved å sette: D;y = Mg(x: xêD &x(y)êDD;y). Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon B0.26 (i) DD;y = Mg(x: xêDD & Eksi(x,y))

(ii) D;y = Mg(x: xêD &x(y)êDD;y)

Det er viktig å merke seg at "D;y" nå brukes i en annen betydning i forbindelse med teorien T;B enn tidligere i forbindelse med T;A.

Det følgende knippe med aksiomer fastlegger betydningene til konnektivene A.,A,E.,E,¬,Nec,Pos, &, v, –>, <–>, = og E på vanlig standardmåte:

SmB21 xêUtvid(L;0) & yêI & Xê((2^I)^D) –>
(i) (Me(A.,x)(X)(y)) =1 <–> (Az)(zêD;y –> (X(z))(y) =1)
(ii) (Me(A,x)(X)(y)) =1 <–> (Az)(zêD –> (X(z))(y) =1)
(iii) (Me(E.,x)(X)(y)) =1 <–> (Ez)(zêD;y & (X(z))(y) =1)
(iv) (Me(E,x)(X)(y)) =1 <–> (Ez)(zêD & (X(z))(y) =1)

SmB22 xêUtvid(L;0) & yêI & Xê(2^I) –>
(i) (Me(¬,x)(X)(y)) =1 <–> X(y)=0
(ii) (Me(Nec,x)(X)(y)) =1 <–>(Aw)(wêI –> X(w)=0)
(iii) (Me(Pos,x)(X)(y)) =1 <–> (Ew)(wêI & X(w)=0)

SmB23 xêUtvid(L;0) & yêI & X,Yê(2^I) –>
(i) (Me(&,x)(X,Y)(y)) =1 <–> X(y) = Y(y)=1
(ii) (Me(v,x)(X,Y)(y)) =1 <–> (X(y) =1 v Y(y)=1)
(iii) (Me(–>,x)(X,Y)(y)) =1 <–> (X(y) =1 –> Y(y)=1)
(iv) (Me(<–>,x)(X,Y)(y)) =1 <–> (X(y) =1 <–> Y(y)=1)

Det følgende aksiomet fastlegger betydningen til identitetspredikatet "=":

SmB24 xêUtvid(L;0) & z,wêDD;* & yêI –>((Me(=,x)(z,w))(y)=1 <–> z=w)

Videre fastlegger det følgende aksiom betydningen til eksistenspredikatet Eks:

SmB25 xêUtvid(L;0) & zêD & yêI –> ((Me(Eks,x)(z))(y)=1 <–> zêDD;y)

Endelig fastlegger den neste formlen i L;A betydningen til beskrivelsesoperatoren "i" :

SmB26 xêUtvid(L;0) & Xê((2^I)^D) & yêI. –>
(i) (E!a)(aêDD & (Au)(uêD –> (X(u))(y) =1 <–> u(y)=a))) –>
(Me(i,x)(X))(y) =
(ia)(aêDD & (Au)(uêD –> (X(u))(y) =1 <–> u(y)=a))))
(ii) ¬(E!a)(aêDD & (Au)(uêD –> (X(u))(y) =1 <–> u(y)=a))) –>
(Me(i,x)(X))(y) = *

Igjen er det viktige å merke seg forskjellen mellom dette aksiomet og det tilsvarende aksiom i T;A, Sm26.

Vi har så langt presentert de prinsippene i teorien T;B som gir en informasjon om egenskapene til semiformale språk. Imidlertid inneholder teorien også, på samme måte som T;A, noen prinsipper om det som her vil bli kalt rent formale språk. For å kunne formulere

disse prinsippene konsist trenger vi imidlertid her, som tilfellet var ved T;A, en del hjelpebegreper.

Definisjon B0.36 Vi setter, om m,n,kêN:

(a) B1(m,n,k) = (2^I)^(AXB) der
  (i) A= ((DD;*)^(D^m))^n og
  (ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

(b) B2(m,n,k) = ((DD;*)^I)^(AXB) der
  (i) A= ((DD;*)^(D^m))^n og
  (ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

Predikatet "y er en intepretasjon av den intensjonale språkstrukturen x" innføres så ved den følgende definisjon:

Definisjon B0.37 Vi sier at y er en intepretasjon for den intensjonale språkstrukturen x, i symboler, "Intepr(y,x)" hvis og bare y er en funksjon som oppfyller de følgende krav:

(i) Dom(y) = UN/m,n,kêN/(P;<m,n,k>(x)UC;<m,n,k>(x))
(ii) Er m,n,kêN & $êP;<m,n,k>(x) så gjelder y($)êB1(m,n,k)
(iii) Er m,n,kêN & $êC;<m,n,k>(x) så gjelder y($)êB2(m,n,k)

Definisjon B0.38 En verditilordning v for den intensjonale språkstrukturen x, i symboler "Vt(v,x)", er en funksjon som tilordner variabeltegnene i x elementer i D. Vi setter:

Vt(v,x) <–> (IntS(x) & vêD^(Rgn(Var(x)))

Definisjonen ovenfor er forøvrig identisk med den tilsvarende definisjonen, Definisjon 0.38 som vi gav i forbindelse med T;A.

Den følgende definisjon er nå meget sentral:

Definisjon B0.39 Anta IntS(x) og at Vt(y,x) & Intepr(z,x), Da er ∏(y,x,z) den funksjonen der vi har:

(a) Dom(∏(y,x,z)) = Fm(x)UTm(x) og
(b) Rgn(∏(y,x,z)) Inkl (2^I)U((DD;*)^I) og som er definert induktivt ved de følgende klausuler:

(i) (Au)(uêRgn(Var(x)) –> ∏(y,x,z)(u) = y(u)
(ii) Har man at:
  (a) m,n,kêN,
  (b) x;1,...,x;mêRgn(Var((x);1))
  (c) t;1,...,t;nêTm((x);1)
  (d) F;1, ... ,F;kêFm((x);1)
  så er: (∏(y,x,z))($(x,1,...,x;m,t;1,...,t;n, F;1,...,F;k) =
    ∂wêI [z($)(X;1(w),...,X;n(w),Y;1,...,Y;k)(w)]

der
Y;j = ∂a;1,....,a;nêD(∏(y(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),x,z)(F;j)) for jê{1,...,k} og
X;i(w) = ∂a;1,....,a;nêD[(∏(y(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),x,z)(t;i))(w)] for iê{1, ...,n}

Definisjon B0.39 bør sammenlignes med aksiom SmB10.

Vi formulerer nok en rekke av setninger i L;B som ingår som ikke-logiske aksiomer i T;B. Disse er helt identiske med de tilsvarende prinsipper i T;A. Først ser vi på:

FSm1 IntS(x) & Intepr(y,x) –> Språk(<y,x>)

Med et formalt språk vil vi også i denne forbindelse forstå nettopp et ordnet par <y,x> der x er en intensjonal språkstruktur og y er en intepretasjon av x. Dette begrepet kan sikkert defineres på en mer omfattende måte, men vi begrenser oss her til å bruke uttrykket om akkurat denne typen strukturer. Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 0.40 FORM(x) <–> (Ez)(Ew)(IntS(z) & Intepr(w,z) & x= <z,w>)

"FORM(x)" leses "x er et formalt språk". Som man ser er altså formale språk i denne forstand ordnete par der den første komponeneten er en intensjonal spåkstruktur og den andre komponenten er en intepretasjon av denne språkstrukturen.

Teorem 0.41 FORM(x) –> Språk(x)

Denne satsen er en triviell konsekvens av Definisjon 0.40 og FSm1.

Det følgende aksiom er langt, men egentlig temmelig trivielt:

FSm2 FORM(x) & m,n,kêN –>

(i) KonTyp(y,<m,n,k>,x) <–> yêP;<n,m,k>((x);1)UC;<m,n,k>((x);1)

(ii) KonTypE(y,<m,n,k>,x) <–> yêP;<n,m,k>((x);1)UC;<m,n,k>((x);1)

(iii) TmKonTyp(y,<m,nk>,x) <–> yêC;<m,n,k>((x);1)

(iv) FmKonTyp(y,<m,nk>,x) <–> yêP;<m,n,k>((x);1)

(v) TmKonTypE(y,<m,nk>,x) <–> yêC;<m,n,k>((x);1)

(vi) FmKonTypE(y,<m,nk>,x) <–> yêP;<m,n,k>((x);1)

(vii) Form(y,x) <–> yêFm((x);1)

(viii) Tm(y,x) <–> yêTm((x);1)

(ix) CTm(y,x) <–> yêTm;c((x);1)

(x) OTm(y,x) <–> yêTm;o((x);1)

(xi) CForm(y,x) <–> yêFm;c((x);1)

(xii) OForm(y,x) <–> yêFm;0((x);1)

(xiii) SetnE(y,x) <–> yêFm;c((x);1)

(xiv) FormE(y,x) <–> yêFm((x);1)

(xv) TmE(y,x) <–> yêTm((x);1)

(xvi) CTmE(y,x) <–> yêTm;c((x);1)

(xvii) OTmE(y,x) <–> yêTm;o((x);1)

(xviii) CFormE(y,x) <–> yêFm;c((x);1)

(xix) OFormE(y,x) <–> yêFm;o((x);1)

FSm3 FORM(x) & m,n,kêN & yêP;<m,n,k>((x);1)U C;<m,n,k>((x);1) –> (E!u)(GMen(u,y,x)) & GMen((x);2(y), y,x)

FSm4 FORM(x) & Vt(z,(x);1) & yêI & wêFm((x);1) –> Sann(w,x,y,z) <–> (∏(z,(x);1,(x);2)(w))(y) = 1

De følgende aksiomer er helt analoge med Sm11 – Sm20:

FSm5 FORM(x) & yêI & wêFm((x);1) –>
(Sann(w,x,y) <–> (Az)(Vt(z, (x);1) –> Sann(w,x,y,z)))

FSm6 FORM(x) & Vt(z,(x);1) & yêI & wêFm((x);1)UTm((x);1) –>
(E!u)(GMen(u,w,x,z)) & GMen(∏(z,(x);1,(x);2)(w),w,x,z)

FSm7 FORM(x) & wêFm((x);1) –> (Sann(w,x) <–> Sann(w,x,a;0))

De neste prinsippene fikserer betydningen til ekstensjonspredikatene i forbindelse med intensjonale språk.

FSm8 FORM(x) & Vt(z,(x);1) & yêI & wêFm((x);1) –>
(E!u)(Eksten(u,w,x,y,z) & Eksten((∏(z,(x);1,(x);2)(w))(y),w,x,y,z)

FSm9 FORM(x) & yêI & wêFm;c((x);1) –>
[(E!u)(Eksten(u,w,x,y)) & (Sann(w,x,y) –> Eksten(1,w,x,y))
&(¬Sann(w,x,y). –> Eksten(0,w,x,y))]

FSm10FORM(x) & wêFm;c((x);1) –> (E!u)(Eksten(u,w,x)) &
(Au)(Eksten(u,w,x) <–> Eksten(u,w,x,a;0)))

La oss til slutt se på de referanseteoretiske aksiomene:

FSm11FORM(x) & Vt(z,(x);1) & yêI & wêTm((x);1) –>
(E!u)(Ref(u,w,x,y,z)) & Ref((∏(z,(x);1,(x);2)(w))(y),w,x,y,z)

FSm12FORM(x) & yêI & wêTm;c((x);1) –>
(Au)(Ref(u,w,x,y) <–> (Az)(Vt(z,(x);1) –> Ref(u,w,x,y,z)))

FSm13FORM(x) & wêTm;c((x);1) –>
(Au)(Ref(u,w,x) <–> Ref(u,w,x,a;0))

Det neste aksiomet

FSmB14 FORM(x) & wêP;<0,n,0>((x);1) & nêN & yêI –>.
(iu)Eksten(u,w,x,w) =
Mg(<x;1,...,x;n>: x;1,...,x;nêDD;* & (((x);2)(w)(<x;1,....,x;n>))(y) =1)

Dette avslutter vår oversikt over de ikke-logiske aksiomene i T;B. Siden vi nå også har helt detaljert angitt det logiske og ikke-logiske vokabularet til språket L;B , samt angitt hvilke logiske aksiomer og slutningsregler vi ønsker å bruke er teorien T;B forsåvidt fullstendig definert.

La oss avslutte dette avsnittet ved å gi en sammenfattende formell definisjon av teorien T;B

Definisjon av T;B Teorien T;B er den førsteordens teorien hvis språk L;A er det førsteordenss̊pråket som har som primitive predikater og konstanter uttrykkene spesifisert ved (1) – (6) og (17) – (61). De ikke-logiske aksiomene i T;B er de universelle lukningene av de følgende setninger i L;B: H1 – H12, A1 – A10, OnB1 – OnB17, SmB1 – SmB10, Sm11 – Sm19, SmB20 – SmB25 og endelig FSm1 – FSm13,FSmB14. De logiske aksiomene er et

vanlig standard sett tilpasset det logiske vokabularet i L;A og hvor slutnings-reglene utelukkende er universell generalisering (UG) og modus ponens (MP). Definisjonene som brukes i forbindelse med T;B er: Definisjon 0.1 – Definisjon 0.24, Definisjon B0.25, Definisjon 0.25 – Definisjon 0.34, Definisjon B0.26, Definisjon B0.36 – Definisjon B0.39, samt Definisjon 0.40.

***

§3 Teorien T:C

Vi skal nå definere nok en variant av teorien T;A. Denne teorien vil her bli betegnet med "T;C". T;C er en første-ordens teori der språket, L;C er nøyaktig som L;A. De ikke-logiske aksiomene i T;C er de følgende: (a) H1 – H12
(b) A1 – A10 (c) On1 – On10. Videre benyttes i T;C definisjonene Definisjon 0.1 – Definisjon 0.34 uforandret. Imidlertid er det visse forskjeller mellom T;A ogT;C når det gjelder de semantiske aksiomene. Sm1, samt Sm4 – Sm9 er fremdeles ikke-logiske aksiomer i T;C. Derimot må Sm2, Sm3 og Sm10 byttes ut med de følgende formler:

SmC2 SEMI;u(x) & m,n,kêN & wê((x);1);3(m,n,k) –>
(iy)(GMen(y,w,x)) ê (2^I)^(AX B)
der
(i) A= ((D;*^I)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

SmC3 SEMI;u(x) & m,n,kêN & wê((x);1);4(m,n,k) –>
(iy)(GMen(y,w,x)) ê ((D;*)^I)^(AX B)
der
(i) A= ((D;*^I)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

SmC10 Er SEMI;u(x) & VTO(z,x) & $êP;<m,n,k>((x);1)UC;<m,n,k>((x);1) og har man videre at
(i) m,n,kêN,
(ii) x;1,...,x;mêRgn(Var((x);1))
(iii) t;1,...,t;nêTm((x);1)
(iv) F;1, ... ,F;kêFm((x);1)
gjelder: Me($(x,1,...,x;m,t;1,...,t;n, F;1,...,F;k) ,x,z) =
Me($,x)(X;1,...,X;n,Y;1,...,Y;k)
der
Y;j = ∂a;1,....,a;nêD(Me(F;j,x,z(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m))) for jê{1,...,k} og
X;i = [∂a;1,....,a;nêD(Me(t;i,x,z(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m)))] for iê{1, ...,n}

Man bør legge nøye merke til i hvilke henseende SmC2, SmC3 og SmC10 adskiller seg fra Sm2, Sm3 og Sm10.

I T;C adopteres videre Sm11 – Sm19 uten forandringer som ikke-logiske aksiomer. Derimot må Sm20 nå forandres. I T;C bruker man i stedet:

SmC20 SEMI;u(x) & wêP;<0,n,0>((x);1) & nêN & yêI. –>
.(E!u)(Eksten(u,w,x,y)) & (Au)(Eksten(u,w,x,y) <–>
u= Mg(<x;1,...,x;n>: x;1,..,x;nê(D;*)^I & Me(w,x)(<x;1,...,x;n>)(y) =1)

Vi beholder Sm21 – Sm23 og Sm26 som ikke-logiske aksiomer i T;C. Derimot må Sm24 og Sm25 endres. I stedet for disse to aksiomene benyttes følgende som fastlegger meningen til identitespredikatet:

SmC24 xêUtvid(L;0) & z,wê(D,*)^I & yêI –>
((Me(=,x)(z,w))(y)=1 <–> z(y)=w(y))

Dessuten benyttes det følgende aksiom som fastlegger betydningen til eksistenspredikatet Eks:

SmC25 xêUtvid(L;0) & zê(D;*)^I & yêI –> ((Me(Eks,x)(z))(y)=1 <–> z(y)êD;y)

I T;C brukes fremdeles definisjonene Definisjon 0.37 og 0.38. Derimot må Definisjon 0.36 og Definisjon 0.39 endres til henholdsvis:

Definisjon C0.36 Vi setter, om m,n,kêN:
(a) Q1(m,n,k) = (2^I)^(AXB) der
(i) A= ((D;*^I)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)
(b) Q2(m,n,k) = ((D;*)^I)^(AXB) der
(i) A= ((D;*)^I^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

og

Definisjon C0.39 Anta IntS(x) og at Vt(y,x) & Intepr(z,x), Da er ∏(y,x,z) den funksjonen der vi har:
(a) Dom(∏(y,x,z)) = Fm(x)UTm(x) og
(b) Rgn(∏(y,x,z)) Inkl (2^I)U((D;*)^I) og som er definert induktivt ved de følgende klausuler:
(i) (Au)(uêRgn(Var(x)) –> ∏(y,x,z) = ∂wêI(y(u)))
(ii) Har man at:
(a) m,n,kêN,
(b) x;1,...,x;mêRgn(Var((x);1))
(c) t;1,...,t;nêTm((x);1)
(d) F;1, ... ,F;kêFm((x);1)
så er: (∏(y,x,z))($(x,1,...,x;m,t;1,...,t;n, F;1,...,F;k) =
z($)(X;1,...,X;n,Y;1,...,Y;k)
der
Y;j = ∂a;1,....,a;nêD(∏(y(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),x,z)(F;j)) for jê{1,...,k} og
X;i = ∂a;1,....,a;nêD((∏(y(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),x,z)(t;i)) for iê{1, ...,n}

I T;C brukes videre Definisjon 0.40 som før. I tillegg er FSm1 – FSm13 ikke-logiske aksiomer.

Istedet for FSm14 vil vi imidlertid benytte:

FSmC14 FORM(x) & wêP;<0,n,0>((x);1) & nêN & yêI –>.
(iu)Eksten(u,w,x,w) =
Mg(<x;1,...,x;n>: x;1,...,x;nê(D;*)^I & (((x);2)(w)(<x;1,....,x;n>))(y) =1)

Dette avslutter vår oversikt over de ikke-logiske aksiomene i T;C. Siden vi nå også har helt detaljert angitt det logiske og ikke-logiske vokabularet til språket L;C , samt angitt hvilke logiske aksiomer og slutningsregler vi ønsker å bruke er teorien T;C forsåvidt fullstendig definert.

La oss avslutte dette avsnittet ved å gi en sammenfattende formell definisjon av teorien T;C

Definisjon av T;C Teorien T;C er den førsteordens teorien hvis språk L;C er det førsteordensspråket som har som primitive predikater og konstanter uttrykkene spesifisert ved (1) – (6) og (17) – (59). De ikke-logiske aksiomene i T;C er de universelle lukningene av de følgende setninger i L;C: H1 – H12, A1 – A10, On1 – On10, Sm1, SmC2, SmC3,Sm4– Sm9, SmC10, Sm11 – Sm19, SmC20, Sm21– Sm23, SmC24,SmC25, Sm26 og endelig FSm1 – FSm13,FSmC14. De logiske aksiomene er et vanlig standard sett tilpasset det logiske vokabularet i L;C (=L;A) og hvor slutnings-reglene utelukkende er universell generalisering (UG) og modus ponens (MP). Definisjonene som brukes i forbindelse med T;C er: Definisjon 0.1 – Definisjon 0.34, Definisjon C0.36, Definisjon 0.37 – Definisjon 0.38, Definisjon C0.39, samt Definisjon 0.40.

§4 Teorien T:D

Teori T;C fremkom ved å modifisere teorien T;A på en bestemt måte. Modifikasjonen kan govt beskrives ved å si at T;C er grunnbetydningen til en konstruksjon $ av type <m,n,k> en funksjon i mengden:

(1) (2^I)^(AXB), eventuelt ((D;*)^I)^(AX B), der
A= ((D;*^I)^(D^m))^n og B= ((2^I)^(D^m))^k)

og ikke som som i T;A en funksjon i mengden:

(2) (2^I)^(AXB), eventuelt ((D;*)^I)^(AX B), der
A= ((D;*)^(D^m))^n og B= ((2^I)^(D^m))^k)

Man legger i denne forbindelse merke til at eksponentene i uttrykkene (1) og (2) er forskjellige. Det er her den egentlige forskjellen ligger. Dette innebærer som vi senere skal komme nøyere inn på at T;C i en viss forstand kan oppfattes som en noe mer generell teori enn T;A, selvom teoriene strengt tatt er uforenelige.

Man kan nå ta i betraktning en tilsvarende modifikasjon av T;B. Vi vil kalle denne nye teorien for T;D. Forskjellen mellom T;B og T;D er helt analog med forskjellen mellom T;A og T;C.

I teorien T;B er grunnbetydning til en semantisk sett entydig konstruksjon $ av type <m,n,k> en funksjon i mengden:

(3) (2^I)^(AXB), eventuelt ((DD;*)^I)^(AX B), der
A= ((DD;*)^(D^m))^n og B= ((2^I)^(D^m))^k)

I teorien T;D er denne grunnbetydningen snarere en funksjon i mengden:

(4) (2^I)^(AXB), eventuelt ((DD;*)^I)^(AX B), der

A= ((DD;*^I)^(D^m))^n og B= ((2^I)^(D^m))^k)

Dette innebærer at en god del av de semantiske aksiomene i de to teoriene, såvel for det vi har kalt semiformale språk som for formale språk, blir forskjellige.

Man kan definere teorien kompakt på den følgende måte:

Definisjon av T;D T;D er den førsteordensteorien som har nøyaktig det samme språk, de samme ikke-logiske aksiomer og de samme definisjoner som teorien T;B bortsett fra de følgende forandringer: SmB2, SmB3, SmB10, SmB20, SmB24, SmB25 Definisjon B0.36, Definisjon B0.39 og FsmB14 endres til henholdsvis SmD2, SmD3, SmD10, SmD20, SmD24, SmD25, Definisjon D0.36, Definisjon D0.39 og FsmD14 nedenfor.

SmD2 SEMI;u(x) & m,n,kêN & wê((x);1);3(m,n,k) –>
(iy)(GMen(y,w,x)) ê (2^I)^(AX B)
der:
(i) A= ((DD;*^I)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

SmD3 SEMI;u(x) & m,n,kêN & wê((x);1);4(m,n,k) –>
(iy)(GMen(y,w,x)) ê ((DD;*)^I)^(AX B)
der:
(i) A= ((DD;*^I)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

SmD10 Er SEMI;u(x) & VTO(z,x) & $êP;<m,n,k>((x);1)UC;<mn,k>((x);1) og har man videre at
(i) m,n,kêN,
(ii) x;1,...,x;mêRgn(Var((x);1))
(iii) t;1,...,t;nêTm((x);1)
(iv) F;1, ... ,F;kêFm((x);1)
gjelder: Me($(x,1,...,x;m,t;1,...,t;n, F;1,...,F;k),x,z) =
Me($,x)(X;1,...,X;n,Y;1,...,Y;k)
der
Y;j = ∂a;1,....,a;nêD(Me(F;j,x,z(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m))) for jê{1,...,k} og
X;i = ∂a;1,....,a;nêD(Me(t;i,x,z(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m))) for iê{1, ...,n}

SmD20 SEMI;u(x) & wêP;<m,n,k>((x);1) & nêN & yêI. –>
.(E!u)(Eksten(u,w,x,y)) & (Au)(Eksten(u,w,x,y) <–>
u= Mg(<x;1,...,x;n>: x;1,..,x;nê(DD;*^I) & Me(w,x)(<x;1,...,x;n>)(y) =1)

SmD24 xêUtvid(L;0) & z,wê(DD;*^I) & yêI –>
((Me(=,x)(z,w))(y)=1 <–> z(y)=w(y))

SmD25 xêUtvid(L;0) & zê(D;*^I) & yêI –>
((Me(Eks,x)(z))(y)=1 <–> z(y)êDD;y)

Definisjon D0.36 Vi setter, om m,n,kêN:
(a) B1(m,n,k) = (2^I)^(AXB) der
(i) A= ((DD;*^I)^(D^m))^n og

(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

(b) B2(m,n,k) = ((DD;*)^I)^(AXB) der

(i) A= ((DD;*^I)^(D^m))^n og

(ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

Definisjon D0.39 Anta IntS(x) og at Vt(y,x) & Intepr(z,x), Da er ∏(y,x,z) den funksjonen der vi har:

(a) Dom(∏(y,x,z)) = Fm(x)UTm(x) og

(b) Rgn(∏(y,x,z)) Inkl (2^I)U((DD;*)^I) og som er definert induktivt ved de følgende klausuler:

(i) (Au)(uêRgn(Var(x)) –> ∏(y,x,z) = y(u)

(ii) Har man at:

(a) m,n,kêN,

(b) x;1,...,x;mêRgn(Var((x);1))

(c) t;1,...,t;nêTm((x);1)

(d) F;1, ... ,F;kêFm((x);1)

så er: (∏(y,x,z))($(x,1,...,x;m,t;1,...,t;n, F;1,...,F;k) =
z($)(X;1,...,X;n,Y;1,...,Y;k)

der

Y;j = ∂a;1,....,a;nêD(∏(y(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),x,z)(F;j)) for jê{1,...,k} og

X;i = ∂a;1,....,a;nêD(∏(y(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),x,z)(t;i)) for iê{1, ...,n}

FSmD14 FORM(x) & wêP;<0,n,0>((x);1) & nêN & yêI –>.
(iu)Eksten(u,w,x,w) =
Mg(<x;1,...,x;n>: x;1,...,x;nê(DD;*^I) & (((x);2)(w)(<x;1,....,x;n>))(y) =1)

Vi har nå gitt en helt rigorøs bekrivelse av T;D og også antydet hvordan den er relatert til T;B. I et senere avsnitt vil vi sammenligne denne teorien med de andre vi har beskrevet og se nøyere på de argumenter som taler til fordel for den og mot den.

§5 Teorien T:A*

Ovenfor har vi definert de fire teoriene T;A – T;D. I det følgende vil ytterligere fire teorier bli definert, nemlig T;A* – T;D*. Disse teoriene er, som betegnelsene antyder, nær beslektet med hverandre og teoriene T;A – T;D. Akkurat her skal vi innskrenke oss til bare å definere dem.

La oss først angi hvilke forandringer som må foretas med T;A for å få T;A*. I T;A arbeider vi bare med en type mulige verdener, logisk mulige verdener. I T;A* tar man i betraktning en mer omfangsrik klasse av verdener som inkluderer de logisk mulige. Teorien utelukker altså ikke muligheten av at det kan finnes verdener som ikke er logisk mulige.

Når det gjelder språket til T:A* er dette nøyaktig som det til T;A bortsett fra at vi utvider det ikke -logiske vokabularet med ett nytt en-plasspredikat, nemlig

(62) "x er en verden" – "W(x)"

De ikke-logiske predikatene og konstantene i L;A*, språket til T;A* er derfor nøyaktig som i L;A bortsett fra at man nå også tar med predikatet (62). Vi bruker "W" som navn på mengden av de verdener i denne inklusive betydningen, og definerer:

Definisjon A*0.1 W = Mg(x: W(x))

Når det gjelder de definisjoner som brukes i forbindelse med T;A* er dette de følgende: Man bruker for det første Definisjon 0.1 – Definisjon 0.34. Disse kan overtas uten noen forandringer. I stedet for Definisjon 0.36 – Definisjon 0.40 bruker vi imidlertid Definisjon A*0.36 – Definisjon A*40. Disse definisjonene fremkommer fra Definisjon 0.36 – Definisjon 0.40 ved å erstatte uttrykket "I" overalt med "W". Dette innebærer at f.eks. Definisjon A*0.36 vil se slik ut:

Definisjon A*0.36 Vi setter, om m,n,kêN:
(a) Q1(m,n,k) = (2^W)^(AXB) der
(i) A= ((D;*)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^W)^(D^m))^k)
(b) Q2(m,n,k) = ((D;*)^W)^(AXB) der
(i) A= ((D;*)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^W)^(D^m))^k)

Dette innebærer også at Definisjon A*0.40 blir identisk med Definisjon 0.40, siden betegnelse "I" ikke forekommer direkte i den sistnevnte definisjonen.

Vi har nå gitt en eksplisitt liste over de definisjonene som brukes i T;A*.

La oss så se på hvilke ikke-logiske aksiomer det er som inngår i teorien T;A*. For det første bemerker vi at formuleringene H1 – H12, A1 – A10 overtas uten forandringer. De er altså også ikke-logiske aksiomer i T:A*. Det samme gjelder de "ontologiske aksiomene" On1 – On10. Dessuten legger man i T;A* til de følgende ikke-logiske akiomer som vedrører predikatet "W(x)":

OnA*11 (Ey)(Ax)(xêy <–> W(x))
OnA*12 (Ax)(Non(x) –> ¬W(x))
OnA*13 (Ax)(Mv(x) –> W(x))
OnA*14 W(x) & Eksi(y,x) –> MI(y)

Dermed har man fiksert de rent ontologiske aksiomene i T;A*. Når det gjelder de semantiske aksiomene i T;A* er disse som følger: La SmA*1 – SmA*20 være de setningene som fremkommer når man i henholdsvis Sm1 – Sm20 overalt erstatter uttrykket "I" med utrykket "W". Da er SmA*1 – SmA*20 ikke-logiske aksiomer i T;A*. La nå videre SmA*21 – SmA*26 være de formuleringene man får som resultat når man i Sm21 – Sm26 erstatter uttrykkene "((2^I)^D)" og "2^I" med henholdsvis "((2^W)^D)" og "2^W" . Da skal også SmA*21 – SmA*26 være ikke-logiske aksiomer i T;A*. Dette innebærer at disse aksiomene, som er valuasjonsregler for konnektivene A.,A, E.,E, ¬,v, &, –>, <–>, i, Nec, Pos, =, Eks, fremdeles gjelder for mulige verdener. Men valuasjonsreglene vil ikke gjelde for verdener som ikke er logsik mulige, dvs. "unormale" verdener. Som eksempel kan man se på SmA*21. Dette vil nå se slik ut:

SmA*21 (a) SEMI;u(<L;0,n;0>)
(b) xêUtvid(L;0) & yêI & Xê((2^W)^D) –>
(i) (Me(A.,x)(X)(y)) =1 <–> (Az)(zêD;y –> (X(z))(y) =1)
(ii) (Me(A,x)(X)(y)) =1 <–> (Az)(zêD –> (X(z))(y) =1)
(iii) (Me(E.,x)(X)(y)) =1 <–> (Ez)(zêD;y & (X(z))(y) =1)
(iv) (Me(E,x)(X)(y)) =1 <–> (Ez)(zêD & (X(z))(y) =1)

Man ser at betingelsen "yêI", som uttrykker at y er en logisk mulig verden, ikke er endret til "yêW". Det er bare i normale, logisk mulige verdener at reglene (i) – (iv) gjelder.

La tilslutt FSmA*1 – FSmA*14 være de formuleringene som fremkommer ved å erstatte uttrykket "I" med uttrykket "W" i FSm1 – FSm14. Da er FSmA*1 – FSmA*14 også ikke-logiske aksiomer i T;A*.

Som en oppsummering gir vi den følgende definisjon av T;A*:

Definisjon av T;A* T;A* er den første-ordensteorien hvis språk L;A* er som L;A, men der det ikke-logiske vokabularet er utvidet med predikatet (62). Videre er de rent logiske aksiomskjemaene og slutningsreglene i T;A* indentiske med dem i T;A. De definisjonene som brukes i T;A* er Definisjon 0.1 – Definisjon 0.34, Definisjon A*0.1, samt definisjonene Definisjon A*0.36 – Definisjon A*0.40. De ikke-logiske aksiomer i T:A* er de universelle lukningene av de følgende setninger i L;A*: (a) H1 – H12 , (b) A1 – A10 (c) On1 – On10, OnA*11 – OnA*14, (d) SmA*1 – SmA*26 og (e) FSmA*1 – FSmA*14.

§6 Teorien T:B*

Vi nevnte teorifamilien T;A* – T;D* ovenfor. Så langt har vi bare sett på T;A* og hvilke forandringer som må gjøres i T;A for at T;A* skal fremkomme som resultat. De andre teoriene, T;B* – T;D* er relatert på tilsvarende måte til henholdsvis T;B – T;D.

La oss først se på T;B*. Språket til denne teorien er det samme som det til T;B bortsett fra at vi nå utvider det med et nytt ikke-logisk predikat, nemlig konstruksjonen "x er en verden", med andre ord (62) ovenfor. Dette bestemmer entydig språket til denne teorien.

Når det gjelder de definisjoner som brukes i forbindelse med T;B* er dette de følgende: Man bruker for det første Definisjon 0.1 – Definisjon 0.34. Disse kan overtas uten noen forandringer. Man må videre inkludere Definisjon A*0.1 av uttrykket "W", Definisjon B0.25 og Definisjon B0.26. I stedet for Definisjon 0.36 – Definisjon 0.40 bruker vi imidlertid Definisjon B*0.36 – Definisjon B*40. Disse definisjonene fremkommer fra Definisjon B0.36 – Definisjon B0.40 ved å erstatte uttrykket "I" overalt med "W". Dette innebærer at f.eks. Definisjon B*0.36 vil se slik ut:

Definisjon B*0.36 Vi setter, om m,n,kêN:

(a) B1(m,n,k) = (2^W)^(AXB) der
  (i) A= ((DD;*)^(D^m))^n og
  (ii) B= ((2^W)^(D^m))^k)

(b) B2(m,n,k) = ((DD;*)^W)^(AXB) der
  (i) A= ((DD;*)^(D^m))^n og
  (ii) B= ((2^W)^(D^m))^k)

La oss så se på hvilke ikke-logiske aksiomer det er som inngår i teorien T;B*. For det første bemerker vi at formuleringene H1 – H12, A1 – A10 overtas uten forandringer. De er altså også ikke-logiske aksiomer i T:B*. Når det gjelder de ontologiske aksiomene må det imidlertid foretas noen forandringer. Vi inkluderer i denne forbindelse formlene på den følgende liste:

OnB*1 (Ey)(Ax)(xêy <–> MV(x))
OnB*2 (Ey)(Ax)(xêy <–> MI(x))
OnB*3 (E!x)(Akt(x))

OnB*4 (Ey)(Ax)(xêy <–> Akt(x))
OnB*5 (Ax)(Akt(x) –> MV(x))
OnB*6 (E!x)Non(x)
OnB*7 (Ey)(Ax)(xêy <–> Non(x))
OnB*8 MI(x) & W(w) –> (E!y)(Man(y,x,w))
OnB*9 ¬(Ex)(Obj(x) & MI(x))
OnB*10 (Ax)(Non(x) –> ¬(Obj(x) v MI(x)))
OnB*11 MI(x) & W(w) –> (Man(y,x,w) –>Obj(y))
OnB*12 Obj(x) –> (Ey)(Ew)(MI(y) & W(w) & Man(x,y,w))
OnB*13 (Ey)(Ax)(xêy <–> Obj(x))
OnB*14 MI(x) & MI(y) –> (x=y <–>
(Aw)(W(w) –> (iz)(Man(z,x,w)) = (iz)(M(z,y,w))))
OnB*15 W(w) & Eksi(y,w) –> Obj(y)
OnB*16 (Ex)MI(x) & (Aw)(W(w) –> (Ey)Eksi(y,w))
OnB*17 MI(x) –> x= ∂wêI((iz)(Man(z,x,w))
OnB*18 (Ey)(Ax)(xêy <–> W(x))
OnB*19 (Ax)(Non(x) –> ¬W(x))
OnB*20 (Ax)(Mv(x) –> W(x))

Dermed har man fiksert de rent ontologiske aksiomene i T;B*. Når det gjelder de semantiske aksiomene i T;A* er disse som følger: La SmB*1 – SmB*20 være de setningene som fremkommer når man i henholdsvis SmB1 – SmB20 overalt erstatter uttrykket "I" med utrykket "W". Da er SmB*1 – SmB*20 ikke-logiske aksiomer i T;B*. La nå videre SmB*21 – SmB*26 være de formuleringene man får som resultat når man i SmB21 – SmB26 erstatter uttrykkene "((2^I)^D)" og "2^I" med henholdsvis "((2^W)^D)" og "2^W" . Da skal også SmB*21 – SmB*26 være ikke-logiske aksiomer i T;B*. Dette innebærer at disse aksiomene, som er valuasjonsregler for konnektivene A.,A, E.,E, ¬,v, &, –>, <–>, i, Nec, Pos, =, Eks, fremdeles gjelder for mulige verdener. Men valuasjonsreglene vil ikke gjelde for verdener som ikke er logisk mulige, dvs. "unormale" verdener.

La tilslutt FSmB*1 – FSmB*14 være de formuleringene som fremkommer ved å erstatte uttrykket "I" med uttrykket "W" i FSm1 – FSm13,FSmB14. Da er FSmB*1 – FSmB*14 også ikke-logiske aksiomer i T;B*.

Som en oppsummering gir vi den følgende definisjon av T;B*:

Definisjon av T;B* Teorien T;B* er den førsteordens teorien hvis språk L;B* er det førsteordensspråket som har som primitive predikater og konstanter uttrykkene spesifisert ved (1) – (6) og (17) – (61) og (62). De ikke-logiske aksiomene i T;B er de universelle lukningene av de følgende setninger i L;B: H1 – H12, A1 – A10, OnB*1 – OnB*20, SmB*1 – SmB*26 og endelig FSmB*1 – FSmB*14. De logiske aksiomene er et vanlig standardsett tilpasset det logiske vokabularet i L;B* og hvor slutnings-reglene utelukkende er universell generalisering (UG) og modus ponens (MP). Når det gjelder definisjoner bruker for det første Definisjon 0.1 – Definisjon 0.34. Disse kan overtas uten noen forandringer. Man må videre inkludere Definisjon B0.25 og Definisjon B0.26. I stedet for Definisjon 0.36 – Definisjon 0.40 bruker vi imidlertid Definisjon B*0.36 – Definisjon B*40. Disse definisjonene fremkommer fra Definisjon B0.36 – Definisjon B0.40 ved å erstatte uttrykket "I" overalt med "W".

Dette avslutter beskrivelsen av teorien T;B*

§7 Teorien T:C*

Denne teorien fremkommer fra T;C på akkurat samme måte som T;A* fremkommer fra T;A.

Når det gjelder språket til T;C* er dette det førsteordensspråket som har som primitive predikater og konstanter uttrykkene spesifisert ved (1) – (6) og (17) – (59) samt (62). Vi betegner dette med"L;C*"

Når det gjelder definisjonene i T;C* er situasjonen som følger. Vi tar med Definisjon A*0.1 av "W". Dessuten kan man adoptere Definisjon 0.1 – Definisjon 0.34 uten forandringer. I T;C brukes imidlertid ytterligere definisjonene Definisjon C0.36, Definisjon 0.37 – Definisjon 0.38, Definisjon C0.39, samt Definisjon 0.40. Disse må nå endres alik at man overalt erstatter uttrykket "I" med uttrykket "W". Den rekken med fem definisjoner som da fremkommer som resulatat betegner vi med Definisjon C*0.36 – Definisjon C*0.40.

Siden T;C* fremkommer fra T;C er det nødvendig å foreta visse endringer i de ikke-logiske aksiomene i T;C. Som man husker er aksiomene i T;C de følgende: H1 – H12, A1 – A10, On1 – On10, Sm1, SmC2, SmC3,Sm4– Sm9, SmC10, Sm11 – Sm19, SmC20, Sm21– Sm23, SmC24,SmC25, Sm26 og endelig FSm1 – FSm13,FSmC14.

Når det gjelder denne listen kan vi beholde H1 – H12 og A1 – A10. De er fremdeles ikke-logiske aksiomer i T;C*. De ontologiske aksiomene i T;C er On1 – On10, OnA*11 – OnA*14

Når det gjelder Sm1, SmC2, SmC3,Sm4– Sm9, SmC10, Sm11 – Sm19, SmC20 må vi overalt erstatte uttrykket "I" med uttrykket "W". De formlene som da fremkommer kaller vi SmC*1 – SmC*20. Disse vil da være ikke-logiske aksiomer i T;C*. Når det gjelder Sm21– Sm23, SmC24,SmC25, Sm26 endres disse slik at man erstatter uttrykkene "((2^I)^D)" og "2^I" overalt med henholdsvis "((2^W)^D)" og "2^W" . De seks formuleringene som fremkommer på denne måten kaller vi SmC*21 – SmC*26. Også disse er ikke-logiske aksiomer i T;C*

Endelig fremkommer de ikke-logiske aksiomene FSmC*1 – FmC*14 fra formlene FSmA*1 – FSmA*13,FSmC14 ved overalt å erstatte "I" med "W".

Sammenfattende kan vi derfor i lys av disse forklaringene gi den følgende definisjon av T;C*:

Definisjon av T;C* Teorien T;C* er den førsteordens teorien hvis språk L;C* er det første-ordenssspråket som har som primitive predikater og konstanter uttrykkene spesifisert ved (1) – (6) og (17) – (59) samt (62). De ikke-logiske aksiomene i T;C er de universelle lukningene av de følgende setninger i L;C*: H1 – H12, A1 – A10, On1 – On10, OnA*11 – OnA*14, SmC*1 – SmC*26 og endelig FSmC*1 – FSmC*14. De logiske aksiomene er et vanlig standard sett tilpasset det logiske vokabularet i L;C (=L;A) og hvor slutnings-reglene utelukkende er universell generalisering (UG) og modus ponens (MP). Definisjonene som brukes i forbindelse med T;C er: Definisjon 0.1 – Definisjon 0.34 samt Definisjon C*0.36 – Definisjon C*0.40.

§8 Teorien T:D*

Vi kommer nå endelig til den siste teorien T;D*. Denne fremkommer fra T;D på en måte som ligner den måten man fikk T;A* fra T;A og T;C* fra T;C.

Det er imidlertid enklere å fiksere T;D* om man tar sitt utgagspunkt i definisjonen av T;B* ovenfor. La oss se på detaljene.

Man kan definere teorien kompakt på den følgende måte:

Definisjon av T;D* T;D* er den førsteordensteorien som har nøyaktig det samme språk, de samme ikke-logiske aksiomer og de samme definisjoner som teorien T;B* bortsett fra de følgende forandringer: SmB*2, SmB*3, SmB*10, SmB*20, SmB*24, SmB*25 Definisjon B*0.36, Definisjon B*0.39 og FsmB*14 endres til henholdsvis SmD*2, SmD*3, SmD*10, SmD*20, SmD*24, SmD*25, Definisjon D*0.36, Definisjon D*0.39 og FsmD*14 nedenfor.

SmD*2 SEMI;u(x) & m,n,kêN & wê((x);1);3(m,n,k) –>
(iy)(GMen(y,w,x)) ê (2^W)^(AX B)
der
(i) A= ((DD;*^W)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^W)^(D^m))^k)

SmD*3 SEMI;u(x) & m,n,kêN & wê((x);1);4(m,n,k) –>
(iy)(GMen(y,w,x)) ê ((DD;*)^W)^(AX B)
der
(i) A= ((DD;*^W)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^W)^(D^m))^k)

SmD*10 Er SEMI;u(x) & VTO(z,x) & $êP;<m,n,k>((x);1)UC;<mn,k>((x);1) og har man videre at
(i) m,n,kêN,
(ii) x;1,...,x;mêRgn(Var((x);1))
(iii) t;1,...,t;nêTm((x);1)
(iv) F;1, ... ,F;kêFm((x);1)
gjelder: Me($(x,1,...,x;m,t;1,...,t;n, F;1,...,F;k),x,z) =
Me($,x)(X;1,...,X;n,Y;1,...,Y;k)
der
Y;j = ∂a;1,....,a;nêD(Me(F;j,x,z(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m))) for jê{1,...,k} og
X;i = ∂a;1,....,a;nêD(Me(t;i,x,z(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m))) for iê{1, ...,n}

SmD*20 SEMI;u(x) & wêP;<m,n,k>((x);1) & nêN & yêW. –>
.(E!u)(Eksten(u,w,x,y)) & (Au)(Eksten(u,w,x,y) <–>
u= Mg(<x;1,...,x;n>: x;1,..,x;nê(DD;*^W) & Me(w,x)(<x;1,...,x;n>)(y) =1)

SmD*24 xêUtvid(L;0) & z,wê(DD;*^W) & yêW –>
((Me(=,x)(z,w))(y)=1 <–> z(y)=w(y))

SmD*25 xêUtvid(L;0) & zê(D;*^W) & yêW –>
((Me(Eks,x)(z))(y)=1 <–> z(y)êDD;y)

Definisjon D*0.36 Vi setter, om m,n,kêN:
(a) B1(m,n,k) = (2^W)^(AXB) der
(i) A= ((DD;*^W)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^W)^(D^m))^k)
(b) B2(m,n,k) = ((DD;*)^W)^(AXB) der
(i) A= ((DD;*^W)^(D^m))^n og
(ii) B= ((2^W)^(D^m))^k)

Definisjon D*0.39 Anta IntS(x) og at Vt(y,x) & Intepr(z,x), Da er ∏(y,x,z) den funksjonen der vi har:

(a) Dom(∏(y,x,z)) = Fm(x)UTm(x) og

(b) Rgn(∏(y,x,z)) Inkl (2^W)U((DD;*)^W) og som er definert induktivt ved de følgende klausuler:

(i) (Au)(uêRgn(Var(x)) –> ∏(y,x,z) = y(u)

(ii) Har man at:

(a) m,n,kêN,

(b) x;1,...,x;mêRgn(Var((x);1))

(c) t;1,...,t;nêTm((x);1)

(d) F;1, ... ,F;kêFm((x);1)

så er: (∏(y,x,z))($(x,1,...,x;m,t;1,...,t;n, F;1,...,F;k) =
z($)(X;1,...,X;n,Y;1,...,Y;k)

der

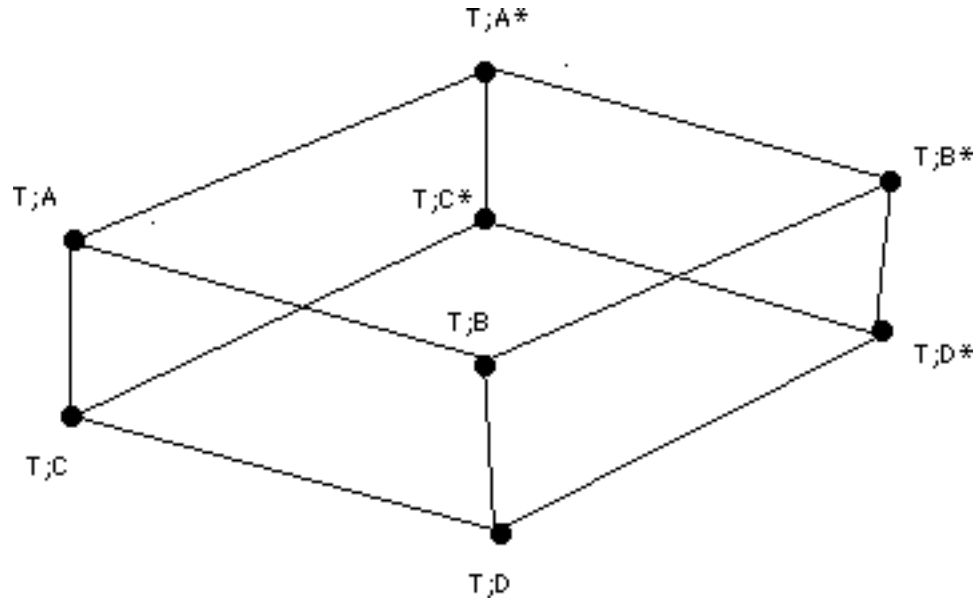
Y;j = ∂a;1,....,a;nêD(∏(y(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),x,z)(F;j)) for jê{1,...,k} og

X;i = ∂a;1,....,a;nêD(∏(y(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),x,z)(t;i)) for iê{1, ...,n}

FSmD*14 FORM(x) & wêP;<0,n,0>((x);1) & nêN & yêW –>.
(iu)Eksten(u,w,x,w) =
Mg(<x;1,...,x;n>: x;1,...,x;nê(DD;*^I) & (((x);2)(w)(<x;1,....,x;n>))(y) =1)

Vi har nå gitt en helt rigorøs bekrivelse av T;D* og også vist hvordan den er relatert til T;B*.

Den følgende figur gir en illustrasjon av forholdet mellom de enkelte teoriene vi har definert:



Kapittel III

Kapittel III

§0 Innledning

Dette kapitlet inneholder svært lite nytt. Det er hovedsakelig en oversikt over begrepsdannelser vi trenger for å kunne formulere visse teoremer i T;A – T;D, T;A* – T;D* på en forståelig og oversiktlig måte. Dette synes å være nødvendig for å kunne utvikle teoriene på en forholdsvis grundig og rigorøs måte.

§1 Om endel mengdeteoretiske begreper.

Jeg vil først fremsette noen bemerkninger om vår bruk av mengdeabstrak-sjonstermer i T;A, og si noe om en måte å innføre dem på som er forskjellig fra den som ble presentert i Kapittel I. Denne alternative måten virker i visse henseende mer elegant og gjør det mulig å formulere visse teoremer på litt lettere. Så langt har mengdeabstraksjonstermer blitt innført kontekstuelt. Eliminasjonsregelen var den følgende:

Definisjon 1.1 Pt;1...t;n <–> (Ey)(Ax)(xêy <–> F(x)) & Pt;1...t;k-1,y,t;k+1,..,t;n om P er et primitivt predikat og t;k = Mg(x: F(x)) hvor F(x) er en åpen setnining som inneholder x som en fri variabel.

Her er det stilltiende forutsatt at y er det første variabeltegnet i ordningen av variabeltegnet som ikke forekommer i Pt;1...t;n. Naturlig nok er det også forutsatt at Definisjon 1.1 skal anvendes så mange ganger at alle mengdeabstraksjonstermene forsvinner. "Primitivt predikat" betyr i denne forbindelse et primitivt predikat i L;A eller noen av de andre beslektede språkene som ble innført i forrige kapittel. Vi bruker også denne regelen på de mengdeabstraksjonstermer som eventuelt skjuler seg i F(x) om t;k = Mg(x: F(x)) og t;k forekommer i Pt;1...t;n. Skal man fjerne alle forekomster av mengde-abstraksjonstermer i en formel kan man gjøre dette ved at man alltid starter med å eleminere den førte termen fra venstre og dernest fjerner termene suksesivt fra venstre mot høyre inntil det ikke er flere igjen. Hver gang etter reglen ovenfor. Dette er altså den eliminasjonsmetoden for mengdeabstraksjonstermer som vi har beskrevet tidligere.

La oss nå se på den andre metoden. Vi bruker da fremdeles Definisjon 1.1 om P er et primitivt predikat i L;A, men vi gjør et unntak ved ê-predikatet og identitetspredikatet. Vi eliminerer mengdeabstraksjonstermene etter de følgende to regler når de forekommer i forbindelse med ê:

Definisjon 1.2 (a) yêMg(x: F(x)) <–> F(y)
(b) Mg(x: F(x))êz <–> (Ey)((Ax)(xêy <–> F(x)) & yêz)

Definisjon 1.3 Mg(x: F(x))êMg(x:G(x)) <–>
(Ey)((Ax)(xêy <–> F(x)) & yêMg(x:G(x)))

Vi bruker t;1, t;t,.... etc. som syntaktiske variabler for termer generelt, dvs. enten variabeltegn, konstanter, beskrivelsestermer eller mengdeabstraksjonstermer. Er nå t;1, t;2 enten variabler eller mengdeabstrakter og minst en term en mengde-abstraksjonsterm elimineres mengdeabstraktet i kontekster av typen t;1=t;2 ved hjelp av følgende regel:

Definisjon 1.4 t;1 = t;2 <–> (Ax)(xêt;1 <–> xêt;2)

Definisjonene ovenfor må naturligvis brukes sammen med visse konvensjoner angående valget av variabeltegn i definiens. Vi velger da offisielt alltid den første variabelen som ikke forekommer i definiendum. I det følgende vil store latinske bokstaver bli brukt som syntaktiske variabler for termer som enten er variabeltegn eller mengdeabstrakter.

I forbindelse med denne metoden for eliminasjon av mengdeabstraksjons-termer nevnes det at vi naturligvis bruker de vanlige standarddefinisjonene av elementære mengdeteoretiske begreper som uordnet og ordnet par, snitt, union, relasjon, funksjon, funksjonsverdi, domenet og verdiområdet til en funksjon osv. slik som beskrevet i f.eks. §1 i Kapittel II i Drake[1] eller som beskrevet i Kapittel 5 og 6 i Takeuti & Zaring [1]. Selvom definisjonene som er gitt i den sistnevnte bok er litt anderledes enn i den førtnevnte er deten forholdsvis enkel sak å se at de er ekvivalente. Det bør imidlirtid nevnes at definisjonene har et litt "bredere anvendelsesområde" i den foreliggende avhandling enn i de to nevnte arbeider siden vårt underliggende førsteordens språk inneholder konstanter og beskrivelsestermer. La oss også nevne at de formlene vi har omtalt som ikke-logiske aksiomer i forbindelse med teoriene T;A – T;D* ikke påvirkes av om vi bruker det ene eller det andre system av kontekstuelle definisjoner. Skrives formlene ut i primitiv notasjon får man de samme eller ekvivalente aksiomsett hva enten vi bruker den ene eller den andre metoden.

I det følgende vil vi konsekvent holde oss til den sistnevnte metoden om ikke annet uttrykkelig sies. Vi vil også benytte oss av den følgende definisjon som vi tar med her av mangel på et bedre sted:

Definisjon 1.5(a) $M(A) \leftrightarrow (Ey)(y=A)$
(b) $Pr(A) \leftrightarrow \neg M(A)$

M(A) innebærer at A er en mengde, Pr(A) at A er det som av og til, i alle fall om man arbeider med ZFC, kalles for en ekte mengde eller klasse – eller om man benytter Quines terminologi– kalles en virtuell mengde.

I forbindelse med bemerkningene ovenfor kan det være verdt å nevne at alle definisjonene i Kapittel 5 – 11 i Takeuti & Zaring [1] kan adopteres uforandret til den rammen vi arbeider innenfor her. Vi vil henvise til disse definisjonene på den følgende måte: "DefTZ 8.1" henviser f.eks. til definisjon 8.1 i kapittel 8 i Takeuti og Zarings bok. På tilsvarende måte referer vi til teoremene i denne boken. Uttrykket "Teorem TZ7.56" betegner følgelig det teoremet som er oppført som 7.56 i kapittel 7 i Takeuti & Zaring [1]. Siden alle de teoremene som bevises av Takeuti og Zaring er teoremer i ZFC og ZFC-aksiomene er inkludert i alle våre teorier her følger det at alle de teoremene som er nevnt av dem også er teoremer i teoriene T;A – T;D*. Det bør også nevnes at alle bevisene i den nevnte bok kan overføres uten større forandringer til vår ramme. Av denne grunn vil vi stort sett konsekvent referere til denne boken når det gjelder mengdeteoretiske satser fordi den er svært detaljert og dessuten inneholder alt man trenger i denne avhandlingen.

§2 Syntaktiske begreper i forbindelse med intensjonale språkstrukturer.

For å kunne utvikle de teoriene vi har beskrevet videre er det formålstjenelig å innføre en del syntaktiske begreper i tilknytning til den type abstrakte språkstrukturer, intensjonale språkstrukturer som vi kalte dem, som ble innført i kapittel I. Det beskjedene målet i denne paragrafen er å gi definisjoner av de følgende seks predikater: "x forekommer fri i u i L", "x er en konstant i L", "x forekommer fri for t i u i L", " x er en konstruksjon i L" og "z er resultatet av å substituere x for y i u i L" der L er en intensjonal språkstruktur. Dette er stort sett de viktigste begrepene av syntaktisk natur som vi trenger.

Vi starter "x er en konstant i den intensjonale språkstrukturen L", i symboler "Con(x,L)"

Definisjon 2.1(a) Con(x,L) <–> [IntS(L) & xêC;<0,0,0>(L)]
(b) Con(L) = Mg(x: Con(x,L)

Dernest defineres "x er et velformet uttrykk i L , "VFu(x,L)" ved:

Definisjon 2.2(a) VFu(x,L) <–> (IntS(L) & xêTm(L)UFm(L))
(b) VFu(L) = Mg(x: VFu(x,L))

Uttrykket "x er en konstruksjon i L", "Constr(x,L)" er definert ved:

Definisjon 2.3 Constr(x,L) <–> IntS(L) &
xê(UN/m,n,kêN/(P;<n,m,k>(L)) U UN/m,n,kêN/(C;<n,m,k>(L)))

Dernest gir vi en definisjon av "Variabeltegnet x forkommer fritt i uttrykket u i L", "Fri(x,u,L)", ved:

Definisjon 2.4 Fri(x,u,L) <–> IntS(L) & xêVar(L) og det enten er slik at
(a) uêCon(L)UVar(L) og x=u
eller det er slik at:
(b) Det finnes y;1,...,y;mêVar(L) , t;1,...,t;nêTm(L), F;1,...,F:kêFm(L) og
$ê P;<n,m,k>(L)UC;<m,n,k>(L) slik at
u=$(y;1,...,y;m,t;1,...,t;n, F;1,... ,F;k) der ¬(xê{y;1,...,y;n) og hvor man har enten (Ej)(jê{1,...,n} & Fri(x,t;j,L)) eller at
(Ei)(iê{1,...,k} & Fri(x,F;i,L)).

Det bør bemerkes at denne definisjonen er ment som en induktiv definisjon på lengden av de velformede uttrykkene i L.

Det neste predikatet vi skal gi en mer eksplisitt definisjon av er "x er et uttrykk som kan substitueres for uttrykket z i u i den intensjonale språk-strukturen L", i symboler "Fr(x,z,u,L)":

Definisjon 2.5 Fri(x,z,u,L) <–> IntS(L) & xêVar(L)& uêVFu(L) & zêTm(L) og det er enten slik at
(a) uêCon(L)UVar(L)
eller det er slik at:
(b) Det finnes y;1,...,y;mêVar(L) , t;1,...,t;nêTm(L), F;1,...,F:kêFm(L) og
$ê P;<n,m,k>(L)UC;<m,n,k>(L) slik at
(i) u=$(y;1,...,y;m,t;1,...,t;n, F;1,... ,F;k) og
(ii) (Ai)(iê{1,...,m} –> ¬(Fri(y;i,z,L) og
(iii) (Ej)(jê{1,....,n) & Fri(x,z,t;j, L) eller
(Ej)(jê{1,....,k) & Fri(x,z,F;j, L)

Også denne definisjonen bør oppfattes som n induktiv definisjon på lengden av uttrykket u i L

Det neste vi ønsker å gjøre er å definere uttrykket "y er resultatet av å substituere z for x i uttrykket w i L", "y = Sub(x,z,w,L)". Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 2.5y = Sub(x,z,w,L) <–> IntS(L) & xêVar(L) & zêTm(L)UVar(L) & wêVFu(L) og man har enten

(a) (x=w & z=y) v (w≠x & y=w & wêCon(L)UVar(L))
eller man har at

(b) Det finnes y;1,...,y;mêVar(L) , t;1,...,t;nêTm(L), F;1,...,F:kêFm(L) og $ê P;<n,m,k>(L)UC;<m,n,k>(L) slik at
w=$(y;1,...,y;m,t;1,...,t;n, F;1,... ,F;k) og der man enten har:

(i) Fr(x,z,w,L) & y = $(y;1,...,y;m, C1,....,Cn,D1,...,Dk) hvor
Ci = Sub(x,z,t;i) for i=1,..,n og
Di = Sub(x,z,F;j) for j=1,...,k
eller man har:

(ii) ¬Fr(x,z,w,L) og y=w

Også denne definisjonen er som man ser ment som en induktiv definisjon på lengden av w.

Vi skriver kortere "w;x[z]" istedet for "Sub(x,z,w,L)" og utelater språkparameteren L når det er klart fra sammenhengen hvilken intensjonal språkstruktur det er vi har i tankene. Det er også lett å generalisere dette substitusjonsbegrepet til simultan substitusjon av termene t;1,...,t;n for henholdsvis x;1,...,x;n i w, der x;1,...,x;n er distinkte variabler. I denne forbindelse vil vi betegne substitusjonsresultatet med w;(x;1,...,x;n)[t;1,...,t;n]. Det overlates som en øvelse til leseren å formulere en rigorøs definisjon av dette siste begrepet.

Det bør bemerkes at de begrepene vi har innført ovenfor er innført i forbindelse med intensjonale språkstrukturer. Er L en annen type struktur, la oss si et semiformalt språk, er derfor alle setninger av eksempelvis typen Fri(x,u,L) usanne. I dette tilfelle må vi istedet for "Fri(x,u,L)" skrive "Fri(x,u,(L);1)" der (L);1 er første-koordinaten i det semiformale språket L siden dette alltid er en intensjonal språkstruktur.

Vi nevner også at definisjonene ovenfor ikke bare er ment som et supplement til T;A, men også til de andre teoriene vi definerte i forigge kapittel. Ser man litt nærmere på disse teoriene er det klart at de har en felles "lingvistisk -syntaktisk-mengdeteoretisk" del representert ved aksiomene H1 – H12, A1 – A10. Definisjonene ovenfor bør oppfattes som et supplement til denne felles delen i teoriene T;A – T;D, T;A* – T;D*.

§3 Teoribegrepet.

I dette avsnittet vil vi gi rigorøse definisjoner av de følgende uttrykk: (1) "x er et utsagn", (2) "x er en teori", (3) "x er et utsagn som er en logisk konsekvens av utsagnet y", (4) "x er en deduktivt lukket teori", (5) "x er en teori i det semifor-male utvedydige språket L", (6) "x er en teori i det formale språket L", (7) "x er en deduktivt lukket teori i det semantisk utvetydige semiformale språket L", (8) "x er en deduktivt lukket teori i det formale språket L", (9) "x er en logisk sannhet i språket y", (10) "x er en logisk konsekvens av y i språket z".

I tillegg til de predikatene vi nå har nevnt vil vi også gi rigorøse definisjoner av de følgende predikater: (11) "x er et formalt system over den intensjonale språkstrukturen y", (12) "x er et rekursivt formalt deduktivt system over den intensjonale språkstrukturen y" (13) "x er et formalt deduktivt system i det semantisk utvetydige semiformale språket y", (14) "x er et formalt deduktivt system i det formale språket y"

Det virker rimelig å hevde at alle disse begrepene er av så stor viktighet i logikken og metodelæren at det i høyeste grad er vesentlig å ha gode definisjoner av dem til rådighet. et er også andre grunner til at vi nå vil gi eksakte definisjoner av disse begrepene. Den første er at vi til stadighet kommer til å snakke om teorier, logisk konsekvens og logisk sannhet. Følgelig er det viktig at vår bruk av disse termene er fastlagt.

La oss nå begynne med den rekken av definisjoner som vi har nevnt og starte med utsagnsbegrepet. Intuitivt synes et utsagn å være en entitet som er sant i visse verdener og usant i andre. Videre virker det rimelig å tro at hvis x er et utsagn og w er en eller annen logisk mulig verden så er utsagnet x enten sant eller usant i denne verdenen. Hvis dette er riktig vil det til ethvert utsagn korrespondere to mengder av mulige verdener, for det første klassen av alle de verdener der utsagnet er sant og for det andre klassen av alle de logisk mulige verdener hvor utsagnet er usant. Den første mengden kaller vi sannhets-mengden til utsagnet. Nå er fê2^I en funksjon som til enhver verden enten tilordner tallet 1 eller tallet 0, siden 2={0,1}. Dette innebærer at det til enhver slik funksjon vil svare to mengder av mulige verdener. På den ene side har man Mg(x: xêI &f(x) =1). På den annen side Mg(x: xêI & f(x)=0). Den første mengden svarer til sannhetsmengden til et utsagn. Dette gjør at det kan være et visst grunnlag for å identifisere et utsagn med en funksjon i mengden 2^I. Dette er bakgrunnen for den følgende definisjon:

Definisjon 3.1 Utsagn(x) <–> xê(2^I)

Uttrykket "Utsagn(x)" leses "x er et utsagn". Er x et utsagn kaller vi klassen av alle de mulige verdener w hvor man har at x(w) = 1 for sannhetsmengden til x. Et utsagn x er med andre ord sant i verdenen w hvis og bare hvis x(w)=1 og usant i verdenen w hvis og bare hvis x(w)=0.

Er nå x og y to utsagn hvor det ikke finnes noen logisk mulig verden w der x er sant og y er usant virker det rimelig å si at utsagnet y er en logisk konsekvens av utsagnet x. Tenker man seg på den annen side to utsagn x og y og hevder at y er en logisk konsekvens av x virker det også merkelig om man skulle hevde at utsagnet y er sant i alle de logisk mulige verdener hvor utsagnet x er sant. Tilsvarende om man forestiller seg at x er en utsagnsmengde og y et individuelt utsagn. Er da y sant i alle de mulige verdener hvor alle utsagnene i x er sanne virker det rimelig å si at y er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden y. Dette er motivet bak den følgende definisjon:

Definisjon 3.2 Knv(x,y) <–> [x Inkl 2^I & yê(2^I) &
¬(Ew)(wêI & (Az)(zêx –> z(w)=1) & y(w)=0)]

Uttrykket "Knv(x,y)" leses "Utsagnet y er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden x".

I det følgende skal vi med en teori forstå en hvilken som helst mengde med utsagn. Vi definerer altså predikatet "x er en teori", i symboler "Teori(x)" ved:

Definisjon 3.3 Teori(x) <–> x Inkl (2^I)

En deduktivt lukket teori er en teori, dvs. en utsagnsmengde der ethvert utsagn som er en logisk konsekvens av en delmengde av teorien selv er med i teorien:

Definisjon 3.4DTeori(x) <–> [Teori(x) &
(Az)(Ay)(yê(2^I) & z Inkl x & Knv(z,y) –> yêx)]

"DTeori(x)" leses, som man forstår, "x er en deduktivt lukket teori". Med en teori i et semiformalt utvetydig språk L forstås her en hvilkens som helst mengde med lukkede formler i den intensjonale språkstrukturen som utgjør den første komponenten i L. Definisjonen er denne:

Definisjon 3.5TSEMI;u(x.L) <–> SEMI;u(L) & x Inkl CForm((L);1)

"TSEMI;u(x,L)" leses naturligvis som "x er en teori i det semantisk utvetydige semiformale språket L". En tilsvarende defiisjon kan gis for formale språk:

Definisjon 3.6TFORM(x,L) <–> FORM(L) & x Inkl CForm((L);1)

Dette innebærer at x er en teori i det formale språket L, i symboler "TFORM(x,L)" hvis og bare hvis L er et formalt språk og x er en mengde lukkede formler i den intensjonale språkstrukturen som utgjør den første komponenten i L. Som man husker er jo et formalt språk, slik vi definerer det et ordnet par <x,y> der x er en intenjonal språkstruktur og y en intepretasjon av x.

Vi bruker "Cons(x)" som forkortelse for "x er en konsistent teori" og gir den følgende definisjon:

Definisjon 3.7 Cons(x) <–> [Teori(x) & (Ew)(wêI & (Ay)(yêx –> y(w)=1)

Fra denne definisjonen fremgår det at en konsistent teori er en teori der det finnes en logisk mulig verden hvor alle utsagnene i teorien er sanne. Dette virker rimelig intuitivt sett.

Konsekvensbegrepet kan også defineres for språk generelt innenfor språkrammen til T;A. Vi betrakter den følgende definisjon i denne forbindelse:

Definisjon 3.8 Knv(Δ,x,L) <–> [Språk(L) &(Az)(zêΔ –> SetnE(z,L)) & SetnE(x,L) & ¬(Ew)(wêI & (Az)(zêΔ –> (iu)(GMen(u,z,L))(w) =1) & (iu)(GMen(u,x,L))(w) =0)]

"Konv(Δ,x,L)" leses "Den semantisk utvetydige setningen x i L er en logisk konsekvens av setningene i Δ i L". Som man ser fra definiens i definisjonen ovenfor må de følgende krav være oppfylt om den relasjonen skal holde for Δ,x og L: For det første må L være et språk, x en setning som er entydig med hensyn på grunnbetydning i språket L og Δ en klasse med setninger i L som er entydige med hensyn på grunnbetydning. For det andre må det ikke finnes noen logisk mulig verden w der grunnbetydningen til setningen x i L er usann og grunnbetydningene som uttrykkes av alle setningene i Δ er sanne. I denne sammenheng må det bemerkes at grunnbetydningen til en semantisk utvetydig setning i følge T;A alltid er et utsagn.

Det neste vi gjør er å definere hva som menes med at x er en deduktivt lukket teori i det semantisk utvetydige språket L:

Definisjon 3.9DTSem;u(x,L) <–> [TSEMI;u(x,L) & (Ay)(Az)(y Inkl z & zêCFm((L);1) & Knv(y,z,L) –> zêx)]

Uttrykket "DTSem;u(x,L)" betyr altså at x er en deduktivt lukket teori i det semantisk utvetydige semiformale språket L. Har man at DTSem;u(x,L) følger det at enhver lukket setning i L som er en logisk konsekvens av setningene i en delmengde av y av x selv er med i x.

Definisjonen ovenfor passer sammen med semiformale språk. Den følgende definisjon er tilpasset den type av språk som vi kaller formale:

Definisjon 3.10 DTForm(x,L) <–> [TFORM(x,L) & (Ay)(Az)(y Inkl z & zêCFm((L);1) & Knv(y,z,L) –> zêx)]

Uttrykket "DTForm(x,L)" leses " x er en deduktivt lukket teori i det formale språket L".

La oss så se på begrepet "logisk sannhet". Vi definerer en logisk sannhet i et språk L som en setning i L som er entydig med hensyn på grunnbetydning og hvor grunnbetydningen som uttrykkes av setningen er sann i enhver logisk mulig verden:

Definisjon 3.11 Log(x,L) <–> [SetnE(x,L) & Språk(L) &
(Aw)(wêI –> (iu)(GMen(u,x,L))(w) =1)]

Uttrykket "Log(x,L)" leses følgelig "x er en logisk sannhet i L".

Den neste definisjonen fastlegger hva vi forstår med et formalt deduktivt system over en intensjonal språkstruktur:

Definisjon 3.12 Vi sier at x er et formalt deduktivt system over den intensjonale språkstrukturen y, FS(x,y) hvis og bare hvis x og y er slik at

(i) IntS(y)

(ii) Det finnes Δ,R,T der x=<Δ,R,T> og der x oppfyller de følgende krav:

(a) Δ Inkl Fm(y)

(b) (Ax)(xêR –> (En)(nêN &n≥1 & x Inkl (Fm(y))^(n+1)))

(c) T er den minste mengden som Z som inneholder Δ og som er lukket under relasjonene i R, dvs. er slik at:

(Ax)(An)(xêR & nêN & x Inkl (Fm(y)^(n+1) –>
(Ay;1),...,(Ay;(n+1))(<y;1,....,y;(n+1)>êx & y;1,...,y;nêZ –>
y;(n+1)êZ))

Som man ser er et formalt system over en intensjonal språk L struktur et trippel <Δ,R,T> der Δ en formelmengde i L og hvor R er et knippe av n+1-ære relasjoner over mengden av formler i L der det forutsettes at n≥1. T er så den minste mengden som inneholder T og som er lukket under relasjonene i R. Det bør bemerkes at vi ikke legger noen restriksjoner på antallet formler som inngår i L. Det kan dreie seg om endelig mange formler, men det kan også tenkes formale systemer der Δ er tellbart uendelig eller overtellbar. Det samme gjelder antallet relasjoner i R. Dette kan også være overtellbart. Det er ikke noe krav at det skal være endelig. I et formalt system av denne typen kaller vi Δ for aksiomene, R for slutningsreglene og T for klassen av teoremer i systemet.

Definisjon 3.13 Vi sier at x er et formalt deduktivt system over det utvetydige semiformale språket L , FSSemi;u(x,L), hvis og bare hvis (SEMI;u(L) & FS(x,(L);1))

På tilsvarende måte definerer vi hva som menes med et formalt system i forbindelse med formale språk:

Definisjon 3.14 Vi sier at x er et formalt deduktivt system over det formale språket L , FSForm;u(x,L), hvis og bare hvis (FORM(L) & FS(x,(L);1))

Den neste definisjonen fastsetter betydningen til uttrykket "bevis" i et formalt system:

Definisjon 3.15 Anta S= <Δ,R,T> er et formalt deduktivt system over den intensjonale språkstrukturen y. Med et bevis i S over y forstår vi en sekvens s der lh(s) = n for noe nêN og som er slik at for alle jê{0,...,n} så har vi enten (a) at s(j)êΔ eller (b) at det finnes k;1,...,k;mê{0,...,n} der k;1,....,k;m<j og xêR slik at <s(k;1),...,s(k;m),s(j)>êx.

Vi skriver "Pf(x,S,y)" som forkortelse for at "x er et bevis i det formale systemet S over den intensjonale språkstrukturen y".

Bevisbarhet i et formalt system definerer vi på den følgende måte:

Definisjon 3.16 Vi sier at x er bevisbar i det formale systemet S over den intensjonale språkstrukturen y , i symboler "Bev(x,S,y)", hvis og bare hvis (Es)(Pf(s,S,y) & x= s(lh(s))) & IntS(y) & FS(S,y).

Definisjonene gitt ovenfor er neppe spesielt originale og temmelig standardpreget. Det skulle derfor neppe være nødvendig med utstakte kommentarer. Det neste vi derfor vil gjøre er å forklare hva vi vil forstå med et rekursivt formalt system over en intensjonal språkstruktur L. En fullstendig definisjon i denne forbindelse vil imidlertid kreve at vi trekker inn en god del av begrepsapparatet fra rekursjonsteorien. Dette er i for seg likefrem, men nokså møysommelig. Vi vil derfor bare i store trekk angi hvordan en definisjon kan formuleres. Vi vil først forutsette at vi har definert predikatet (1) "g er en Gødel-nummerering av den intensjonale språkstrukturen L"- "Gød(g,L)". Hvis g er en gødelnummerering av en intensjonal språkstruktur L vil vi kreve at Func(g) & Dom(g) = (L);1 & Rgn(g) Inkl N. Videre vil vi kreve av denne funksjonen g at restriksjonen av den til Tm(L), termene i L, og restriksjonen av den til Fm(L), formlene i L er en-entydige funksjoner og at g"Fm(L) og g"Tm(L) er rekursive mengder av naturlige tall. Det er mulig å gi en definisjon av predikatet (1) som oppfyller disse kravene, men vi skal altså ikke forsøke å gi en eksplisitt definisjon av denne her. Vi tenker oss også at vi har til rådighet definisjoner av predikatene (2) " x er en rekursiv mengde av naturlige tall" og (3) " x er en n-ær rekursiv relasjon over mengden av de naturlige tall". Adekvate definisjoner av disse to predikatene kan gis innenfor rammen av T;A. La oss forkorte (2) og (3) med henholdsvis "Rec(x)" og "Rec;n(x)".

Gitt disse forutsetningene kan vår definisjon av rekursivt formalt system formuleres slik:

Definisjon 3.17 x er et rekursivt formalt system over den intensjonale språkstrukturen L, RFS(x,L) hvis og bare hvis FS(x,L), (x);2 er en endelig mengde og man har at det finnes en g slik at:

(i) Gød(g, L)

(ii) Rec(g"((x);1)

(iii) (An)(Ay)(nêN & yê(x);2 & y Inkl Fm(L)^(n+1) –>
Rec;(n+1)(Mg(g(a;1),...,g(a;(n+1))>: <a;1,...,a;(n+1)>êy)))

Er L en intensjonal språkstruktur og g en gødelnummerering av L så vil det – om man forutsetter Church's tese – være slik at det finne en effektiv prosedyre for å avgjøre hvorvidt et element hører med i y Inkl Fm(L) eller ikke hvis og bare hvis g"y er en rekursiv mengde. Likeledes vil en x Inkl Fm(L)^(n+1) være effektiv hvis og bare hvis Rec;(n+1) (Mg(<g(a;1),...,g(a;(n+1))>: <a;1,...,a;(n+1)>êy) (n≥0). Dette innbærer at dersom RFS(x,L) så finnes det en effektiv prosedyre for å avgjøre hvorvidt en FêFm(L) er med i (x);1, dvs. aksiomene i det formelle systemet x. Likeledes finnes det for hver rê(x);2 der r Inkl Fm(L)^(n+1) en effektiv prosedyre for å avgjøre hvorvidt et n+1-tuple av formler i L, <a;1,...,a;(n+1)>, er et medlem av r eller ikke. Er derfor x et rekursivt formalt system over den intensjonale språkstrukturen L vil det følgelig finnes en helt effektiv prosedyre som kan brukes til å avgjøre om en vilkårlig formelsekvens i dette språket er et bevis i dette systemet x eller ikke.

Definisjon 3.18 Vi sier at x er et rekursivt formalt deduktivt system over det semantisk utvetydige semiformale språket L, RFSemi(x,L) hvis og bare hvis SEMI;u(L) & RFS(x, (L);1)

En tilsvarende definisjon gis i forbindelse med formale språk:

Definisjon 3.19 x er et rekursivt formalt deduktivt system over det formale språket L, RFSemi(x,L) hvis og bare hvis FORM(L) & RFS(x,(L);1)

Definisjonene 3.18 og 3.19 er naturligvis helt analoge med definisjonene 3.13 og 3.14.

Vi har nå definert de viktigste begrepene av syntaktisk og semantisk art vi trenger i forbindelse med teorier. Andre begreper som har forbindelse med dem som har blitt omtalt ovenfor vil bli introdusert ettersom vi trenger dem.

Det kan være hensiktsmessig å avslutte dette avsnittet med den følgende definisjon, som plasseres her av mangel på noe bedre sted:

Definisjon 3.20
(a) ValF,w,v,L) <–> Sann(F,L,w,v)
(b) Val(F,w,L) <–> (Av)(Vt(v,(L);1) –> True(F,w,v,L))
(c) Val(F,L) <–> (Aw)(wêI –> True(F,w,L)

La oss helt tilslutt bemerke at Definisjon 3.1 – 3.20 forutsettes å være definisjoner i alle de teoriene vi tidligere har beskrevet, altså T;A – T;D og T;A* – T;D*.

§4 Noen bemerkninger om første-ordens språk.

I forbindelse med de syntaktiske og semantiske begrepene vi har innført i forrige avsnitt er det nærliggende å inføre helt presist begrepene "første-ordens språk" og "førsteordens teori". Nå er det selvfølgelig velkjent hvordan disse begrepene kan defineres innenfor en ramme av den typen vi arbeider med her. Dette avsnittet inneholder derfor ikke noe nytt eller oppsiktsvekkende, men tas bare med for at det ikke skal være altfor store huller i den systematiske fremstillingen. Det kan også ha en viss interesse i seg selv å se hvordan disse begrepene kan defineres mer presist.

Definisjon 4.1(a) Vi sier at s er et enkelt kvantifikasjonsteoretisk konnektivsystem over den intensjonale språkstrukturen x, Q(s,x), hvis og bare hvis man har:
(i) IntS(x) & Seq(s) & lh(s) =4
(ii) s(0)êP;<1,0,1>(x) & s(1)êP;<0,0,2>(x) & s(2)êP;<0,0,1>(x)
(iii) s(3)êP;<0,2,0>(x)
(b) Har man at s er et enkelt kvantifikasjonsteoretisk konnektivsystem over den intensjonale språkstrukturen x setter vi:
(i) A;s = s(0)
(ii) –>;s = s(1)
(iii) ¬;s = s(2)
(iv) =;s = s(3)

Som man ser representerer A;s allkvantoren, ¬;s negasjonstegnet, –>;s tegnet for materiell implikasjon og =;s identitetstegnet dersom s er et enkelt kvantifikasjonsteoretisk konnektivsystem for x.

Definisjon 4.2 Med en førsteordens språkstruktur x med konnektivsystem s , IntS;f(x,s), forstås en intensjonal språkstruktur x som oppfyller de følgende krav:

(i) Q(s,x)
(ii) (Am)(An)(Ak)(m,n,kêN –> C;<m,n,k>(x) =ø)
(iii) (Am)(An)(Ak)(m,n,kêN &¬(<mn,k>ê{<1,0,1>,<0,0,2>,<0,0,1>,<0,2,0>}
U Mg(<0,n,0>: nêN & n≥1)) –> P;<m,n,k>(x) =ø)
(iv) P;<1,0,1>(x) = {s(0)}
(v) P;<0,0,2>(x) = {s(1)}
(vi) P;<0,0,1>(x) = {s(2)}
(vii) {s(3)} Inkl P;<0,2,0>(x)

Med en førsteordens språkstruktur forstår vi så et ordnet par <x,s> der x er en førsteordens språkstruktur med konnektivsystem s. Formelt kan definisjonen formuleres slik:

Definisjon 4.3 IntS;f(x) <–> (Ey)(Es)(x = <y,s> & IntS;f(y, s))

Vi definerer så hva som menes met et logisk aksiom i en førsteordens språkstruktur i denne forstand.

Definisjon 4.4 La x=<y,s> være en førsteordens språkstruktur. Da er J et logisk aksiom i x, LAks(G,x) hvis og bare hvis Det finnes F,G,HêFm(y) og u,r,vêRgn(Var(y)) der vi har ¬Fri(u,F,y) og J er en av de følgende formler i y:

(1) –>;s(A;s(u,–>;s(F,G)), –>;s(F, A;s(u,G)))
(2) –>;s(A;s(r, F), F;r[v])
(3) –>;s(–>;s(¬;s(F), ¬;s(G)), –>;s(F,G))
(4) –>;s(F,–;s(gG,F))
(5) –>;s(–>;s(F,–>;s(G,H)), –>;s(–>;s(F,G), –>;s(F,H)))
(6) =;s(u,u)
(7) –>;s(=;s(u,v), –>;s(H;r[u], H;r[v]))

La oss så innføre de følgende to slutningsregler:

Definisjon 4.5 La y være en førsteordens språkstruktur med konnektivsystem s. Da setter vi:

R1(y,s) = Mg(<<F,–>;s(F,G)>,G>: F,GêFm(y))
R2(y,s) = Mg(<F, A;s(u,F)>: FêFm(y) & uêRgn(Var(y)))

Vi kan nå gi vår "eksakte" definisjon av førsteordens teori:

Definisjon 4.6 Vi sier at x er en førsteordens teori over språket y , Teori;f(x,y) hvis og bare hvis

(i) IntS;f(y)
(ii) FS(x,(y);1)
(iii) Mg(w: LAks(w,y)) Inkl (x);1
(iv) (x);2 = {R1((y);1,(y);2), R2((y);1, (y);2)}

La oss tilslutt bemerke at de begrepene vi har innført ovenfor er av en rent mengdeteoretisk natur.

Som man ser har det så langt bare blitt forklart hva som menes med en førsteordens språkstruktur og en førsteordens teori. Vi har strengt tatt ikke gitt noen definisjon av hva som menes med et førsteordens språk. Dette skal vi gjøre nå. Det skulle fremgå av den

definisjonen som nå gis at førsteordens språk at dette kan oppfattes som en slags intepreterte språk:

Definisjon 4.7 Vi sier at x er et førsteordens språk, i symboler "FORM;f(x)", hvis og bare hvis man har at x er et triple <L,z,s> der komponentene L,z,s oppfyller de følgende betingelser:

(i) IntS;f(L,s)
(ii) Intepr(z,L)
(iii) (AX)(Aw)(wêI & Xê((2^I)^D) –>
(z(s(0))(X)‘w =1 <–> (Aa)(aêD –> X(a)‘w =1))
(iv) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I) –>
(z(s(1))(X,Y)(w)=1 <–> (X(w)=1 –> Y(w)=1)))
(v) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I) –>
(z(s(2))(X,Y)(w)=1 <–> X(w)=0))
(vi) (Aw)(Aa)(Ab)(wêI & a,bêD;* –>(z(s(3))(a,b)(w) =1 <–> a=b))

Vi bemerker det følgende i forbindelse med denne definisjonen: Slik vi nå har definert "førsteordens språk" er slik språk strengt tatt ikke formelle språk i den betydning vi tidligere har definert. Førsteordens språk i den betydning som er innført ved Definisjon 4.7 er altså ikke med i Mg(x: FORM(x)). Det eneste man kan vise er at FORM;f(x) –> FORM(<(x);1, (x);2). For det andre passer Definisjon 4.7 bare sammen med T;A. I forbindelse med de andre teoriene er det nødvendig å redfinere begrepet på en passende måte. Ved ettertanke skulle det imidlertid ikke være så vanskelig å se hvordan dette skulle kunne gjøres.

§5 Tarskis teori om deduktive systemer.

I forbindelse med begrepene som ble introdusert i de tidligere avnittene kan det være vel verdt å innføre en del nye begreper som kan bidra til å gi teorien et mer enhetlig preg. I det følgende skal vi vise hvordan alle de begrepene som behandles i Tarski [1] kan innføres innenfor vår ramme. Alle de satser som bevises i dette arbeidet av Tarski kan da bevises på samme måte innenfor rammen av T;A.

Definisjon 5.1x er en konsekvensstruktur, i symboler KS(x), hvis og bare hvis x er et ordnet par <Z,Cn> som oppfyller de følgende krav:

(i) Z er en mengde og Cn en funksjon der Pt(Z) Inkl Dom(Cn)
(ii) Cd(Z) ≤ Aleph;0
(iii) (Ay)(y Inkl Z –> y Inkl Cn(y) Inkl Z
(iv) (Ay)(y Inkl Z –> UN/xêPt(y)ΩFin/(Cn(x)) = Cn(y))

Her betegner "Fin" klassen av alle endelige mengder, med andre ord har man Fin= Mg(x: Cd(x) ≤ Aleph;0). Som man ser er en konsekvensstruktur en rent algebraisk struktur. Det er i og for seg ikke noe som tilsier at domenet Z i en slik struktur <Z,Cn> skal være en mengde av setninger i et bestemt språk, og at Cn(x), for x Inkl Z, skal være klassen av alle de setninger som er konsekvenser av dem i x. Men det er først og fremst strukturer av denne type som har interesse. Siden denne definisjonen er rent mengdeteoretisk kan den selvfølgelig brukes i forbindelse med alle de teoriene som har blitt presentert.

Definisjon 5.2 Er K en konsekvesstruktur settes S(K) = (K);1 og Cn(K) = (K);2

I forbindelse med konsekvensstrukturer er det av interesse å studere de følgende begreper:

Definisjon 5.3 Anta K er en konsekvensstruktur. Da setter vi:

(i) D;K = Mg(x: Cn(K)(x) Inkl x Inkl S(K)
(ii) Eq;K(x) = Mg(y: yUx Inkl S(K) & Cn(K)(x) = Cn(K)(y))
(iii) A;K(x) = FinΩEq;K(x)
(iv) U;K = Mg(z: A;k(x) ≠ø)
(v) Uh;K = Mg(x: Pt(x)ΩEq;K(x) = {x})
(vi) Bas;K(x) = Eq;K(x)ΩUh;K

Studerer man denne definisjonen nærmere, ser man at D;K er klassen av alle deduktivt lukkede setningsmengder over K. Videre er er Eq:K(x) klassen av alle setningsmengder i K som er ekvivalente med med x. A;K er klassen av endelige aksiomatiseringer av x over K. U;K er klassen av alle de setningsmengder i K som har en endelig aksiomatisering. Uh;K er klassen av uavhengige setningsmengder i K og endelig er Bas;k(x) klassen av alle de setningsmengder i K som utgjør en uavhengig basis for x. Når vi her snakker om " en setningsmengde" i K mener vi endelmengde av domene til K.

Definisjon 5.4 Er K en konsekvensstruktur setter vi:

(i) Cons;K = Pt(S(K)) – Eq;K(S(K))
(ii) Ent;K(x) = Cn(K)(x)U (S(K)ΩMg(z: ¬(xU{z}êCons;K)))
(iii) F;K = Pt(S(K))ΩMg(x: Ent;K(x) = S(K))

Cons(K) er mengden av konsistente setningsmengder over K. Videre er Ent;K(x) avgjørbarhetsområdet til x over K, dvs. klassen av de setninger over K som avgjøres av setningsmengden x i K. Endelig er F;K klassen av alle de fullstendige setningsmengdene over K.

Tarski introduserer også to begreper om fullstendighetsgrad til en setningsmengde i forbindelse med konsekvenssystemer. Det dreier seg om det han kaller den kardinale og den ordinale fullstendighetsgraden. Disse begrepene kan defineres slik:

Definisjon 5.5 La K være en konsekvensstruktur. Da setter vi:

(a) g;K(x) = Cd(D;KΩMg(y: x Inkl y)). g;K(x) kan kalles den kardinale fullstendighetsgraden til x over strukturen K
(b) Seq;<K,a>(X,y) <–> X er en funksjon som oppfyller følgende krav:
  (i) Dom(X) = aêOn
  (ii) Rgn(X) Inkl Pt(S;K)
  (iii) y Inkl S;K
  (iii) (Ab)(bêOn & b<a –> X(b)êD;KΩCons;KΩMg(z: y Inkl z)
  (iv) (Ab)(Ac)(b<c<a –> X(b) SInkl X(c))

Man ser at Seq;<K,a>(X,y) innbærer at X er en strengt monoton sekvens av lengde a over K av konsistente deduktivt lukkede systemer som inkluderer y.

(c) G;K(y) = (μa)(aêOn & (EX)(Seq;<K,a>(X,y))) G;K(y) er det Tarski kaller den ordinale fullstendighetsgraden til y over strukturen K

Begrepene innført ved Definisjon 4.1 – Definisjon 4.5 er som nevnt hentet fra Tarski [1]. I denne artikkelen gir Tarski bevis for 67 teoremer som gjelder for konsekvenssystemer generelt. Siden alle bevisene for disse teoremene kan gjennomføres i ZFC – utvalgsaksiomet er i denne forbindelse overflødig – følger det at alle Tarskis teoremer også er teoremer i teoriene T;A – T;D, T;A* – T;D* om vi bruker de definisjonene som har blitt innført. Faktisk

kan de bevisene Tarski gir overtas uten noen vesentlige endringer. De endringer som trengs vil bare være av en rent notasjonell natur.

La oss tilslutt definere "konsekvenssystemet til z i språket L", "KSy(z,L)" slik:

Definisjon 5.6(a) Ksy(z,L) =

Mg(x: SetnE(x;L) & (Ey)(y Inkl z & Fin(y) & Knv(y,x,L)))

(b) KonsR(L) = Mg(<x, Ksy(x,L)>: x Inkl Mg(y: Setn(y,L))

Tar man denne definisjonen for gitt kan man vise at det følgende teoremet holder:

Teorem 5.7 (T;A) Anta SEMI;u(L) & Cd(Fm((L);1))≤ Aleph;0. Anta videre at det følgende holder: (Ax)(SetnE(x,L) <–> xêFm;c((L);1). Da har man at paret <Mg(x: SetnE(x,L)), KonsR(L)> er en konsekvensstruktur.

Vi overlater beviset for denne satsen som en øvelse til leseren. Det følger fra dette teoremet at alle de atsene som nevnes i Tarski [1] holder for den spesielle strukturen <Mg(x: SetnE(x,L)), KonsR(L)> om forutsetningene i Teorem 5.7 holder, dvs. om det er slik at SEMI;u(L) & Cd(Fm((L);1))≤ Aleph;0 og man har: (Ax)(SetnE(x,L) <–> xêFm;c((L);1). Vi gjør oppmerksom på at en tilsvarende sats kan formuleres for formale språk.

****

Kapittel IV

Kapittel IV

§1 Konstruksjonssystemer og eksempler på formale språk.

L;A er et svært rikt språk. Det er derfor naturligvis vanskelig å gi noen fullstendig , eller tilnærmelsesvis fullstendig aksiomatisering av de setningene i L;A som faktisk er sanne. I følge Gødels ufullstendighetsteorem er dette også i prinsippet umulig. Medlemskapspredikatet, "xêy" inngår i L;A og fra en intuitiv synsvinkel representerer ZFC-aksiomene i L;A intuitivt sett temmelig rinelige påstander. Men man vet at det er mulig å konstruere en setning i L;ê, det delspråket av L;A som bare har "xêy" som primitivt predikat, som faktisk er uavgjørbar på grunnlag av ZFC-aksiomene. Enn mer gjelder dette for alle rekursive utvidelser. Det følger derfor at det er umulig å gi noen fullstendig aksiomatisering av de intuitivt sett sanne setningene i L;A og at T;A derfor selvfølgelig ikke representerer noen slik aksiomatisering.

Dette forhindrer ikke at T;A er en iøynefallende ufullstendig teori og at det kan være av interesse å se på hvilke setninger som kan legges til den slik at den blir mer fullstendig.

Vi har tidligere definert strukturen <E;1,Var;0>. Det er klart at man kan betrakte en rekke intensjonale språkstrukturer x som er slik at (x);1= E;1 og (x);2 = Var;0. La oss betegne mengden av alle disse intensjonale språkstrukturene med IntS(E;1) i det vi setter:

IntS(E;1) = Mg(x: IntS(x) & (x);1 = E;1 & (x);2 = Var;0)

Gitt denne definisjonen er det lett å bevise:

Teorem 1.0 M(IntS(E;1))

Beviset for denne eksistenssetningen er forholdsvis enkelt og det overlates til leseren.

I det følgende skal vi gi eksempler på enkelte semiformale språk som er mer eller mindre kompliserte. Av denne grunn trenger vi en enkel og hendig måte å spesifisere elementer i IntS(E;1) på. Av denne grunn kan det være hensiktsmessig å innføre noen definisjoner:

Definisjon 1.1x er en n-ær E;1 konstruksjon, i symboler "cE;1(x)" hvis og bare hvis xê E;1^(E;1^n) der nêN. x er en E;1 konstruksjon hvis og bare hvis x er en n-ær E;1 konstruksjon.

Det bør bemerkes at en 0-ær E;1 konstruksjon rett og slett er et element i E;1 siden E;1^n = 1 om n=0 og E;1^1 = E;1. I denne forbindelse kan man konsultere de konvensjonene vi tidligere har gjort rede for i forbindelse med notasjonen "A^B".

Vi skal snakke om en viss type konstruksjonssytemer som vil bli omtalt som normale. Disse er avgrenset ved den følgende definisjon:

Definisjon 1.2Z er et normalt konstruksjonssystem , NKsys(Z) hvis og bare hvis man har at Z oppfyller de følgende krav:

(i) Z er et kategorisystem over <E;1,Var;0> ie. KSys(Z,<E;1,Var;0>)
(ii) A,A.,E, E. ê(Z);1(<1,0,1>)
(iii) ¬, Pos, Nec ê(Z);1(<0,0,1>)
(iv) &, v, –>, <–> ê (Z);1(<0,0,2>)
(v) Eks ê(Z);1(<0,1,0>)

(vi) = ê(Z);1(<0,2,0>)
(vii) i ê (Z);2(<1,0,1>)

Her er naturligvis A, E, A., E., &, –>, <–>, v, ¬, Pos, Nec, Eks, = og i de E;1-konstruksjonene som ble innført ved Definisjon 0.15 i Kapittel I. I det følgende er det gunstig å kunne snakke om det minste konstruksjonssystemet Z om oppfyller en viss betingelse F(Z). Vi definerer dette på følgende vis:

Definisjon 1.3 Det minste konstruksjonssystemet Z over <E;1,Var;0> som oppfyller betingelsen F(Z), i symboler Min;c(Z, F(Z)), er definert ved:

Min;c(Z,F(Z)) = (iZ)(KSys(Z,<E;1,Var;0>) & F(Z) &
(AX)(X Inkl Z & KSys(X, <E;1,Var;0>) & F(X) –> X=Z))

La oss nå, for å være mer konkrete, se på det følgende eksempel på en E;1 konstruksjon. Vi definerer funksjonen X;ê ved:

X;ê = ∂<x,y>êE;1^2((x) er medlem av (y))

Man bør i forbindelse med den høyre siden i denne definisjonen ha i tankene de konvensjonene vi innførte i Kapittel I i forbindelse med representasjonen av sekvensene i E;1. La oss så sette:

C';ê = Min;c(Z: NKSys(Z) & X;ê ê (Z);1(<0,2,0>))

Man kan da lett verifisere:

Teorem 1.4 KSys(C';ê , <E;1, Var;0>)

La oss nå sette L';ê = L[(C;ê);1, (C;ê);2, E;1, Var;0]. Da er naturligvis L1;ê en intensjonal språkstruktur. Denne språkstrukturen vil da være et rimelig eksempel på en slik struktur som representerer en formalisert versjon av et fragment av Norsk. Med andre ord synes det som om den følgende setning i L;A er forholdsvis rimelig:

(1) Repfrag(L';ê, n;0)

Det kan være hensiktsmessig å gi ytterligere noen eksempler. Vi definerer et normalt kvantifikasjonsteoretisk konstruksjonssystem slik:

Definisjon 1.5Z er et normalt kvantifikasjonsteoretisk konstruksjonssystem, NQKSys(Z) hvis og bare hvis Z oppfyller følgende krav:

(i) KSys(Z,<E;1,Var;0>)
(ii) A,E ê(Z);1(<1,0,1>)
(iii) ¬ ê(Z);1(<0,0,1>)
(iv) &, v, –>, <–> ê (Z);1(<0,0,2>)
(v) = ê(Z);1(<0,1,0>)

La oss så definere: C;ê = Min;c(Z: NQKSys(Z) & X;ê ê(Z);1(<0,2,0>)) og dernest sette L;ê = L[(C;ê);1, (C;ê);2, E;1,Var;0]. Ut fra en rimelig tolkning av "Repfrag" synes da den følgende setning i L;A å kunne forsvares:

(2) Repfrag(L;ê, n;0)

La oss gi ytterligere noen eksempler på elementer i IntS(E;1) som rimligvis kan oppfattes som formaliserte versjoner av fragmenter av Norsk. Det kan f.eks ha en viss interesse å se på de følgende E;1-konstruksjoner som selvfølgelig er helt vilkårlig valgt og som vi bare nevner her for å gi illustrasjoner til de bgrepsdannelsene som har blitt innført:

X;1 = ∂xêE;1(((x) er en person))
X;2 = ∂<x,y>êE;1^2(((x) lever ved tidspunktet (y)))
X;3 = ∂xêE;1(((x) er et tidspunkt))
X;4 = ∂<x,y>êE;1^2((Tidspunktet (x) kommer før tidspunktet (y)))
X;5 = ∂<x,y>êE;1^2(((x) lever ved tidspunktet (y) i Oslo))
X;6 = ∂<x,y>êE;1^2(((x) lever ved tidspunktet (y) i nærheten av Oslo))
X;7 = ∂<x,y>êE;1^2(((x) er svært interessert i filosofi ved tidspunktet (y)))
X;8 = ∂<x,y>êE;1^2(((x) har lest gjennom Kants samlede verker ved tidspunktet (y)))
X;9 = ∂<x,y,z>êE;1^3(((x) vet ved tidspunktet (y) at (z)))

I forbindelse med disse definisjonene minner vi igjen om de konvensjonene vi innførte i Kapittel I i forbindelse med representasjonen av sekvensene i E;1.

La oss sette:

C;0 = Min;c(Z: NQKsys(Z) & X;1,X;3ê(Z);1(<0,1,0>) &
X;2, X;4, X;5, X;6, X;7, X;8 ê (Z);1(<0,2,0>) & X;9 ê(Z);1(<0,2,1>)

På samme måte som tidligere er det lett å verisere at:

Teorem 1.7 KSys(C;0,<E;1,Var;0>)

Setter man derfor L;q = L[(C;0);1, (C;0);2, E;1, Var;0] så følger det at L;q er en intensjonal språkstruktur. Igjen virker det rimelig å si at L;q representerer en formalisert versjon av Norsk. Den følgende påstand kan derfor ikke uten videre betraktes som uplausibel:

(3) Repfrag(L;q,n;0)

Ser man nå på formlene i L;q er det klart at disse utelukkende er satt sammen av norske ord, samt variabletegn og paranteser. Det dukker ikke opp noen spesielle logiske symboler eller matematiske tegn i disse formlene. Det virker ikke uberettiget å se på disse setningene som en slags setninger i norsk.

Tar man for gitt at (1) – (3) ovenfor er riktige følger det umiddelbart på grunnlag av "H-aksiomene" i T;A at <L;q,n;0>, <L;ê, n;0> og <L'ê,n;0> er språk. Forsåvidt virker ikke dette spesielt urimelig. Det kan imidlertid være av en viss interesse å bemerke et par ting i forbindelse med (1) – (3). For det første er dette velformede formler i L;A. Man kan skrive dem fullstendig ut i primitiv notasjon. For det andre skulle det være klart at (1) – (3) ikke er teoremer i T;A. Dette skulle intuitivt sett være svært rimelig. I prinsippet kan man sikkert også gi et helt formelt bevis for denne påstand. Det er imidlertid klart at et detaljert bevis for dette ville bli temmelig komplisert på grunn av kompleksiteten til T;A og at man derfor – spesielt på grunn av påstandens triviale natur – neppe ville vinne noe særlig på å gjennomføre det.

I tilknytning til (1) – (3) er det nærliggende å betrakte de følgende to setninger:

(4) SEMI;u(<L;ê,n;0>) & SEMI;u(<L;q, n;0>)

Man skulle forvente at

(5) (AF)(CForm(F, L;e) –> SetnE(F,<L;q,n;0>)

skulle følge fra (4). Strengt tatt er dette ikke tilfelle. (5) følger bare fra (4) om man antar at det følgende holder:

(6) SEMI;u(x) –> (CForm(F, (x);1) <–> SetnE(F,x))

Vi har imidlertid ikke tatt med (6) blandt aksiomene i T;A. Men det virker som et plausibelt prinsipp som det kan være rimelig å ta med i forskjellige utvidelser av T;A. Også den følgende setning i L;A, som er enda mer generell enn (6) virker plausibel:

(7) Språk(x) –> (SetnE(F,x) <–> (Setn(F,x) & (E!z)(GMen(z,F,x)))

Det bør bemerkes at om vi legger (7) til T;A kan man i den resulterende teori bevise (6) forutsatt at man legger til det følgende prinsipp som kan fortone seg rimelig:

(8) SEMI(x) –> (CForm(y,x) <–> Setn(y,x))

I forbindelse med det som er sagt ovenfor kan man også nevne den følgende setning:

(9) Repfrag(x,n;0) & xêIntS(E;1) –>
Mg(z: CForm(z, <x,n;0>)) Ω Mg(x: Setn(x,n;0)) =ø

Som man ser sier denne setningen at ingen av formlene i en intensjonal språk-struktur over E;1 som representerer en formalisert versjon av et fragment av norsk er setninger i norsk.

Setningen (9) kan utledes fra det følgende mer generelle prinsipp:

(10) SEMI(x) –> Mg(z: CForm(z,(x);1))Ω Mg(z: Setn(z,(x);2)) =ø

Setningen (10) uttrykker åpenbart en meget sterkere påstand enn (9). Det er vanskelig – og heller ikke nødvendig for våre formål her – å ta definitivt stilling til hvorvidt (9) og (10) kan regnes som sanne setninger i L;A. Kanskje det er helt umulig å avgjøre. Men umiddelbart virker det som om det standpunkt at begge setningene er gale kanskje er det rimligste. Imidlertid kan vel begge setningene føyes til T;A som nye ikke-logiske aksiomer uten at det oppstår noen motsigelser.

La oss før vi går videre innskyte at selvom x er en intenjonal språkstruktur som representerer en formalisert versjon av et fragment av norsk behøver det ikke enhver isomorf språkstruktur å gjøre det.

Det er ingen grunn til å fremsette noen presise gjetninger om kardinaltallet til klassen av semantisk utvetydige semiformale språk i den betydningen som har blitt innført. Men betrakter man

SEMI(E;1,n;0) = Mg(x: SEMI;u(x) & (x);1êInt(E;1) & (x);2 = n;0)

virker det som om denne mengden, intuitivt bedømt, virker meget rikholdig.

Vi har ikke gitt noen definisjon av predikatet "SetnE(x,y)" som leses "x er en setning som er entydig med hensyn på grunnbetydning i språket y". Det vil heller ikke bli gitt noen slik definisjon her. Men utfra det man umiddelbart forbinder med denne konstruksjonen synes det rimelig å hevde at hvis Setn(x,y) er tilfelle så er det nødvendig at x er en setning som enten er sann eller usann i språket y, videre at den har en fiksert betydning i språket y og at den ikke kan regnes som flertydig. Angående forholdet mellom semantisk utvetydige setninger og konstruksjoner som er semantisk utvetydige med hensyn på grunnbetydning kunne man betrakte den følgende setning i L;A:

(11) SEMI(x) & (Ay)(yêFm;c((x);1) –> SetnE(y,x)) –> SEMI;u(x)

Man ser at (11) uttrykker at dersom x er et semiformalt språk der alle formlene i språkstrukturen er sematisk entydige setninger i x, så er x et semiformalt semantisk utvetydig språk. Det er nærliggende å gjette på at man kan legge til (11) som et nytt ikke-logisk aksiom i T;A, eventuelt sammen med (4), (6) og (7) uten at man får som resultat en teori som er inonsistent. Imidlertid tror jeg det er fornuftig å se på (11) med en viss skepsis.

La oss nå vende tilbake til spørsmålet om konkrete eksempler på semiformale språk og semiformale semantisk utvetydige språk. I denne forbindelse kan det være hendig å innføre konstruksjonen "x er et n-ært predikat over n;0 og E;1" – "Pred(n,E;1,n;0)". Den følgende definisjon gis av dette uttrykket:

Definisjon 1.8 Pred(n,E;1,n;0) <–> xê(E;1^(E;1^n)) &
(Ey)(y= Min;c(Z: NQKSys(Z) & xê(Z);1(<0,n,0>)) &
Repfrag(L[(y);1, (y);2, E;1,Var;0], n;0))

La oss også innføre følgende konvensjon angående spesifikasjonen av E;1-konstruksjoner. I stedet for å angi en slik ved en definisjon av typen:

X;k = ∂xêE;1(((x) er en rød gjenstand))

angir vi den bare ved å angi uttrykket "((x) er en rød gjenstand)". Man ser at om man setter inn et eller annet element hentet fra E;1 for "x" i dette uttrykket får man et nytt uttrykk i E;1.

Det synes nå nokså opplagt at det kan være rimelig å se på f.eks. de følgende konstruksjoner som eksempler på unære predikater over n;0 og E;1 i den betydning som ble angitt ovenfor:

(i) ((x) er en forklaring)
(ii) ((x) er en vitenskapelig teori)
(iii) ((x) er en pseudoforklaring)

Det bør understrekes at disse eksemplene er helt vilkårlig valgt. Man føler at denne listen kan forlenges at infinitum.

Når det gjelder eksempler på binære predikater over n;0 og E;1 gir vi de følgende eksempler som også er helt vilkårlig valgt ut:

(iv) ((x) er en person som er plaget av sterke mindreverdighetskomplekser ved tidspunktet (y))
(v) ((x) er en person som er sterkt overvektig ved tidspunktet (y))
(vi) (Det naturlige tallet (x) er større enn det naturlige tallet (y))
(vii) (Det reelle tallet (x) er større enn det reelle tallet (y))

(viii) ((x) er en person som før tidspunktet (y) har deltatt i en opphetet politisk debatt)

Hvis det er påkrevet med flere eksempler på predikater over n;0 og E;1 kan man nevne alle de predikatene som vi har spesifisert og nevnt at inngår i det ikke-logiske vokabularet til T;A. I Appendix I er denne listen gitt i sin helhet. La nå "Z" betegne denne predikatmengden inklusive (i) – (viii) ovenfor. La videre ß være funksjonen definert ved:

ß(n) = ZΩ{x: Pred(n,E;1,n;0) (n≥1)

Setter man så :

K;0 = Min;c(X: NQKSys(X) & (An)(nêN –> ß(n) Inkl (X);1(<0,n0>)

Kan man bevise den følgende sats

Teorem 1.9 Z Inkl UN/n,1,∞/(Pred(n,E;1,n;0) –> KSys(K;0,<E;1,n;0>)

Setter vi nå J;0 = L[(K;0);1, (K;0);2, E;1,Var;0) så representerer påstanden SEMI(<J;0,n;0>) etter vår mening en meget plausibel påstand i L;A. Det synes også som om språket <J;0,n;0> såvidt vi kan se rimeligvis kan karakteriseres som et semiformalt semantisk utvetydig språk. Men dette er kanskje ikke fullt så innlysende. Vi lar dette være vårt siste eksempel på et semiformalt utvetydig språk og håper dermed å ha sannsynliggjort at denne klassen med språk er ekstremt rik og at teorier som filosofisk og logisk sett er ytterst interessante, f.eks. T;A kan formuleres på en tilfredstillende måte innenfor rammen av et slikt språk. Dette er alt vi trenger i det følgende.

Man kan imidlertid gå litt videre på dette punkt og spørre om det er slik at enhver setning i norsk som er semantisk sett utvetydig kan formalisres. Er med andre ord den følgende setning i L;A rimelig?

(12) SetnE(x,n;0) –> (Ey)(SEMI;u(y) & (y);2 = n;0 & ((y);1);3(<0,0,0>)=ø &
(Ew)(CForm(w,(y);1) & (iz)GMen(z,x,n;0) = (iz)GMen(z,w,y)))

Det er klart det ville være en sak av stor betydning om (12) faktisk var sann. Imidlertid virker det som om det ville ha enda større interesse om den følgende, sterkere, setning var det:

(13) (Ey)(SEMI;u(y) & (y);2 = n;0 & ((y);1);3(<0,0,0>) ≠ø &
(Ex)(Func(x) & Dom(x) = E;1ΩMg(z: SetnE(z,n;0)) &
Rgn(x) Inkl Mg(z: CForm(z,(y);1) &
(Aw)(wêDom(x) –> (ir)GMen(r,w,n;0) = (ir)GMen(r,x(w),y))))

Merk at (12) grovt sett bare sier at enhver semantisk utvetydig setning i norsk kan overettes til et eller annet semiformalt språk. (13) derimot påstår at det finnes et semiformalt utvetydig språk L og at enhver semantisk utvetydig setning i norsk kan avbildes på en lukket formel i dette språket L som har akkurat den samme grunnbetydning.

Jeg er selvfølgelig ute av stand til å avgjøre om (11) og (13) er sanne i L;A eller ikke. Det eneste som kan bemerkes er at disse setningene, som sikkert bør oppfattes som kontroversielle, ikke er implisert av de setningene som inngår som ikke-logiske aksiomer i T;A. På den annen side har vi nå for oss en begrepsramme innenfor hvilken man kan undersøke konsekvensene til de nevnte setningene. Det er så langt ikke noe som viser at det er umulig å finne plausible teorier i L;A som sammen med f.eks. (13) har motintuitive konsekvenser. I så tilfelle kan det være grunnlag for å forkaste (13).

Et annet interessant, men vanskelig og spekulativt, spørsmål er om det finnes noe "maksimalt" semiformalt utvetydig språk over E;1 og n;0, med andre ord om man har:

(14) (Ey)(yêSEMI(E;1,n;0) & ¬(Ez)(zêSEMI(E;1,n,0) & Fm((y);1) SInkl Fm((z);1)))

Heller ikke dette spørsmålet er vi istand til å avgjøre. Men også her kan det vel være tillatt å nevne at T;A utgjør en begrepsramme innenfor hvilken man kan undersøke konsekvensene til (14).

La oss helt tilslutt i dette avsnittet også nevne at man kan spørre om T;A utvidet med alle setningene (1) – (14) som vi har nevnt i dette kapitlet er en motsigelsesfri teori. Formulert litt mer presist kan spørsmålet formuleres slik. La "T;J" betegne den teorien man får når de universelle lukningene av setningene (1) – (14) legges til som nye ikke-logiske aksiomer til de ikke-logiske aksiomeme i T;A. Er det da mulig å bevise at T;J er konsistent om T;A er det? Det kan være et visst grunnlag for å tro at dette er tilfelle. Men et bevis for dette ville antagelig bli svært komplisert om det skulle utføres i detalj. Vi skal derfor ikke gå nærmere inn på dette her.

§2 Om den mengdeteoretiske basis i teoriene T:A – T:D, T:A* – T:D*.

I den forrige paragrafen diskuterte vi visse sider ved den syntaktisk-lingvistiske delen av teorien T;A. I denne paragrafen vil vi se på visse aspekter ved de mengdeteoretiske aksiomene. Siden disse mengdeteoretiske aksiomene er felles for alle de teoriene vi har spesifisert vil det vi har å si her være relevant ikke bare i forbindelse med T;A, men også i forbindelse med T;B – T;D,T;A* – T;D*.

Innenfor den mengdeteoretiske rammen av teori T;A kan vi definere et kumulativt hierarki av mengder ved transfinit induksjon og på den følgende måte:

(i) V;0 = ø
(ii) V(a+1) = V(a)U Pt(V(a)
(iii) V(b) = UN/a<b/(V(a)) om b er et limesordinaltall, ie aêK;II

I forbindelse med denne definisjonen gjør vi oppmerksom på at vi bruker a,b etc. som variabeltegn som tar ordinaltall som verdier. "On" betegner klassen av alle ordinaltall og K;II er klassen av alle limesordinaltall. K;I betegner klassen av alle etterfølger ordinaltall, dvs. alle de ordinaltall bortsett fra 0 som har et entydig bestemt ordinaltall som sin forgjenger. Vi vil kalle sekvensen <V(a)>/aêOn/ for det kumulative hierarkiet av rene mengder. De diverse V(a) for aêOn omtaler vi som nivåene i dette hierarkiet. Det følgende er nå et teorem i alle våre teorier:

Teorem 2.1 (ZFC) (Ax)((Ea)(aêOn & xêV(a)))

Satsen er identisk med Teorem TZ9.16, altså teorem 9.16 i kapittel 9 i Takeuti &Zaring [1].

Ser man litt nærmere på hva dette teoremet innebærer skulle det være klart at det impliserer at enhver ting man kvantifiserer over i T;A – om vi holder oss til denne teorien – er et element på et eller annet nivå V(a) for noe ordinaltall aêOn. Satsen impliserer altså at alt er mengder. Dette kan virke paradoksalt siden en rekke ting, for eksempel fysike objekter ikke synes å være mengder. Det er naturlig å tenke seg at mengder er abstrakte gjenstander og er da fysiske objekter mengder vil fysiske gjenstander måtte regnes for å være av abstrakt natur, noe som virker eiendommelig. Man kunne derfor være fristet til å trekke den slutning at enten finnes ikke fysiske gjenstander eller så er de av abstrakt natur. Man kan komme

unna denne konklusjonen uten å modifisere T;A, eller noen av de mengdeteoretiske aksiomene, ved å oppgi antagelsen om at alle mengder er abstrakte. Noen entiteter, for eksempel en del mengder, men ikke alle kan antas å være konkrete, dvs. ha koordinater i tid og rom. På denne måten synes man å øve minst vold mot våre intuisjoner uten derfor å oppgi skillet mellom abstrakt og konkret, eller måtte modifisere noen av de mengdeteoretiske aksiomene vi har inkludert i T;A.

På den annen side er det ikke noe i veien for å modifisere de mengdeteoretiske aksiomene slik at man tillater eksistensen av visse ikke-mengder eller urelementer. La oss tenke oss at vi innfører predikatet "x er en mengde" – vi forkorter dette med "Set(x)" – i tillegg til medlemspredikatet og de øvrige predikatene i de teoriene som har blitt spesifisert. I stedet for A1 – A10 kunne man da ha brukt de følgende aksiomer som vi her gir en liste over:

An1 Set(x) & Set(y) & (Az)(zêx <–> zêy) –> x=y
An2 (E!x)(Set(x) & ¬(Ey)(yêx))
An3 (Ey)(yêx) –> Set(x)
An4 (Ey)(Set(y) & (Ax)(xêy <–> ¬Set(x)))
An5 (Ey)(yêx) –> (Ey)(yêx & ¬(Ez)(zêy & zêx))
An6 Set(z) –> (Ey)(Set(y) &(Ax)(xêy <–> (xêz & F(x)))) forutsatt at y ikke fore-kommer fri i F.
An7 (Ey)(Set(y) & (Ax)(xêy <–> x=z v x=w))
An8 Set(w) –> (Ey)(Set(y) & (Ax)(xêy <–> (Set(x) & (Ar)(rêx –> rêw))))
An9 Set(x') & (Ay)(yêx' –> Set(y)) –>
(Ew)(Set(w) & (Ax)(xêw <–> (Ez)(xêz & zêx')))
An10 (Ew)(Set(w) & øêw & (Ax)(Set(x) &xêw –>
(Ez)(Set(z) & zêw & (Au)(uêz <–> (uêz v u=x)))))
An11 (Ax)(Ay)(Az)(F(x,y) & F(x,z) –> x=z) &Set(u) –>
(Ev)(Set(v) & (Ay)(yêv <–> (Ex)(xêu & F(x,y))))
An12 Set(u) & (Ay)(yêu –> (Ex)(xêy)) &
(Ay)(Aw)(yêu & wêu &y≠w –> ¬(Ev)(vêw & vêy)) –>
(Er)(Set(r) & (Ax)(xêu –> (Et)((As)(sêr &sêx <–> s=t))))

Som man ser er dette ZFC-aksiomene der vi har modifisert disse noe slik at de er begrenset til mengder der det trengs. I tillegg har vi lagt til An3 og An4 som sier henholdsvis at enhver entitet som inneholder et element er en mengde og at mengden av alle ikke-mengder, dvs. mengden av ur-elementer, finnes. Det skulle fremgå av denne aksiomlisten at vi ikke har postulert at urelementer eksisterer. Men det kan man gjøre ved å føye til det følgende som et ikke-logisk aksiom:

An13 (Ex)(¬Set(x))

Den naturlige modellen for dette mengdeteoretiske systemet er naturligvis det kumulative hierarki med mengden av urindivider som bunn-nivå. Erstatter man A1 – A10 i T:A – T;D* med An1 – An12 og utvider de respektive språk med det nye predikatet "Set(x)" får man en serie med teorier som man kan betegne T;A' – T;D*'. Vi skal imidlertid ikke undersøke dem nærmere, men bemerker bare at det ikke er noe som forhindrer oss fra å bruke dette mengdeteoretiske systemet som basis i våre teorier i stedet for den vanlige versjonen av ZFC. Selvfølgelig vil dette kreve visse modifikasjoner i endel av definisjonene av de mengdeteoretiske begrepene og at man en rekke steder må føye til visse forbehold om at noe er en mengde i endel av de mengdeteoretiske teoremene. Det skulle likevel ikke være noen

alvorlige problemer med denne fremgangsmåten. Den har også den fordel at vi kommer unna de motintuitive konsekvensene som ble omtalt ovenfor. Imidlertid blir teoriene ytterligere komplisert og det er hovedgrunnen til at vi fortsatt velger å arbeide med T;A – T;D* istedet for T;A' – T;D*'. La oss til slutt nevne at systemet ovenfor, la oss kalle det ZFC;u – ZFC med urelementer – trolig er ekvikonsistent med ZFC siden det synes som om ZFC kan intepreteres inn i ZFC;u og omvendt.

§3 Om utvidelser av teoriene i familien T:A – T:D*

Hensikten med å gi en så nøyaktig fremstilling av teorien T;A samt de andre teoriene i den samme familien er delvis den at vi anser T;A for en teori som har stor interesse i seg selv og som det derfor er vesentlig å fremstille så klart som mulig og få et dypest mulig innblikk i. Men det er en annen grunn til dette som er minst like viktig. T;A vil i det følgende fungere som en ramme-teori for en rekke teorier som etter vår mening er av vesentlig og betydelig filosofisk interesse. I denne forbindelse kan det nevnes at vi etterhvert vil betrakte utvidelser av T;A slik at man etterhvert får en teori som kan sies å være om (1) evidens, (2) iaktagelse og observasjon, (3) prøvbarhet, (4) aksepterbarhet til teorier , (5) enkelhet i forbindelse med teorier, (6) årsaksforhold og disposisjoner, (7) kausallover og utsagn av lovlignende karakter og (8) kontrafaktiske betingelsesutsagn – for bare å nevne noen emner. I denne forbindelse kan man betrakte listen over predikatkonstruksjoner som er gitt i Appendix II, Avsnitt I – VI. La oss kalle det førsteordens språket som har de predikatene som er oppført på denne listen som ikke-logiske predikater – og da er de primitive predikatene i T;A inkludert – for L;I. Det er da klart at L;I er en utvidelse av L;A. Det skulle også være rimelig å hevde at det ville ha stor interesse å avgrense eksplisitt så store deler som mulig av alle de setningene i L;I som er logiske sannheter. Man må da tenke seg at man forsøker å gjøre dette på den måten som vi så langt har gjort det for L;A's del. Det skulle være innlysende at dette delvis er en vanskelig oppgave og at man ikke uten videre kan regne med å komme frem til ukontroversielle resultater. Men det ville være høyest besynderlig om man på forhånd liksom viftet vekk denne oppgaven med den begrunnelsen at den ikke er inter-essant nok.

For å gi leseren et mer presist bilde av hva det er vi vil forsøke å gjøre gir vi først en definisjon av uttrykket "F er en logisk sannhet i L i kraft av betydningen til konstruksjonene i klassen Δ". Vi forkorter dette uttrykket med "Log;Δ(F,L)".

Definisjon 3.1 Log;Δ(F,L) <–>: SEMI;u(L) & FêFM(L) &
Δ Inkl ((L);1);3 U ((L);1);4 & (Az)(Intepr(z,(L);1) &
(Ak)(kêΔ –> z(k)= Me(k,L)). –>
(Aw)(Ay)(wêI & Vt(y, (L);1) –> (∏(y,(L);1,z)(F))‘w = 1))

Er nå L;0 et gitt semiformalt utvetydig språk og <Δ;i>/i≤n/ en sekvens av konstruksjonsmengder der Δ;i Inkl Constr(L;0) for i≤n og Δ;i ISnkl Δ;(i+1) for i<n, vil det vanligvis være slik at:

Mg(F : Log;(Δ;i)(F, L;0) SInkl Mg(F : Log;(Δ;i+1)(F, L;0)

Men dette behøver ikke alltid være tilfelle. Derimot vil alltid den første mengden være inkludert i den siste.

Det vi nå vil gjøre for L;I's vedkommende kan beskrives slik: For det første vil det bli antatt at SEMI;u(L;I). Dette er ingen ukontroversiell antagelse. Men vi tillater oss å legge den til grunn for våre betraktninger som en arbeidshypotese. Dernest vil vi avgrense diverse konstruksjonsklasser Δ;0, Δ;1,... der Δ;i Inkl Constr(L;I). I forbindelse med disse vil vi så betrakte diverse formelmengder F;1, F;2, ... og drøfte om disse kan regnes som logiske

sannheter i L;I. I forbindelse med disse formelmengdene F;1, F;2,... betraktes så tilsvarende utvidelser av T;A: T;A[F;1], T;A[F;2],.... . Siden mange av konstruksjonene i L;I er vage og i endel henseende uklare er det klart at de teorier som betraktes må oppfattes som tentative og og av en helt midlertidig natur. Det er derfor helt påkrevet at alternativer og modifikasjoner til de diverse teorier som formuleres drøftes inngående. Et poeng er imidlertid at teoriene T;A – T;D* utgjør veldefinerte rammer som undersøkelser av denne art kan foretas innenfor.

Imidlertid skal vi ikke gå nærmere inn på disse litt løst antydete projektene her, men henviser leseren i stedet til Del II av dette arbeidet hvor divere utvidelser av T;A av den nevnte type spesisifiseres og drøftes in concretio.

§4 Modellteori for intensjonale språkstrukturer.

Det er en viss forskjell mellom T;A og vanlig modellteori i Kripke-Scott-Montague stil for intensjonale språk av forskjellig art. Det er imidlertid, noe som skulle være temmelig klart fra fremstillingen av teoriene T;A – T;D*, også meget nære sammenhenger. For å belyse forskjeller og likheter i denne forbindelse kan det være nyttig å definere en del viktige modellteoretiske begreper.

La oss først definere begrepet modellstruktur:

Definisjon 4.1x er en modellstruktur, i symboler "MS(x)", hvis og bare hvis x er et 5-tuple <I,D,E,*,K> der de forskjellige komponentene er mengder som oppfyller følgende krav:

(i) $I \neq ø$ & $D \neq ø$.
(ii) Func(E) & Dom(E) =I & Rgn(E) Inkl Pt(D)
(iii) ¬(*êD)

Som man ser er en modellstruktur en rent mengdeteoretisk størrelse og man forutsetter derfor naturligvis ingenting om hva slags entiteter det er som inngår i de forskjellige komponentene i en slik struktur. Er M en modellstruktur kan man omtale (M);1 og (M);2 som henholdsvis de mulige verdenene i M og de mulige individene i M, men man må da huske på at predikatene "x er en mulig verden i modellstrukturen M" og "x er et mulig individ i modellstrukturen M" da har en helt annen betydning enn de to konstruksjonene "x er en mulig verden" og "x er et mulig individ". Man kan ikke fra det at x er en mulig verden i en modellstruktur M slutte at at x nødvendigvis er en mulig verden. En mulig verden i en modellstruktur kan være noe som ikke har den fjerneste likhet med en mulig verden i den intuitive betydning, det kan f.eks. dreie seg om en sekvens av reele tall.

Man kan nå definere Qi(m,n,k)(M) der M er en modellstruktur i betydningen ovenfor, på samme måte som man definerte "Qi(m,nk)" ved Definisjon 0.36 i Kapittel I. For tydelighetens skyld formulerer vi definisjonen eksplisitt slik:

Definisjon 4.1.1 Anta at M = <I,D,E,*,K> er en modellstruktur. Da setter vi:

(a) Q1(m,n,k)(M) = (2^I)^(AXB) der
  (i) A= ((D;*)^(D^m))^n og
  (ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)
(b) Q2(m,n,k)(M) = ((D;*)^I)^(AXB) der
  (i) A= ((D;*)^(D^m))^n og
  (ii) B= ((2^I)^(D^m))^k)

Videre defineres hva som menes med "x er en verditilordning for det intensjonale språket y assosiert med modellstrukturen M" – "Vt;M(x,y)" og "x er en intepretasjon av det

intensjonale språket L assosiert med modellstrukturen M" – "Intepr;M(x,L)" ved den følgende definisjon:

Definisjon 4.2(a) Vt;M(x,y) <–> IntS(y) & MS(M) & Func(x) &
Dom(x) = Rgn(Var(y)) & Rgn(x) Inkl (M);2

(b) Intepr;M(x,L) <–> .
MS(M) & IntS(L) & Func(x) & Dom(x)= Constr(L) &
(Am)(An)(Ak)(m,n,kêN & yêP;<m,n,k> –> x(y)êQ1(m,n,k)(M)) &
(Am)(An)(Ak)(m,n,kêN & yêC;<m,n,k> –> x(y)êQ2(m,n,k)(M))

Vi kan nå definere hva som menes med "valuasjonsfunksjonen for det intensjonale språket L assosiert med modellstrukturen M, verditilordningen y og intepretasjonsfunksjonen z", i symboler "∏;M(y,L,z)" på en måte som er helt analog med den definisjonen vi presenterte av "∏(y,x,z)" i Kapittel I, Definisjon 0.39. Definisjonen kan formuleres slik:

Definisjon 4.2.1 Anta IntS(L) og at Vt;M(y,L) & Intepr;M(z,L) & MS(M) og at M=<I,D,E,*,K>. Da er ∏;M(y,L,z) den funksjonen der vi har:

(a) Dom(∏;M(y,L,z)) = Fm(L)UTm(L) og

(b) Rgn(∏;M(y,L,z)) Inkl (2^I)U((D;*)^I) og som er definert induktivt ved de følgende klausuler:

(i) (Au)(uêRgn(Var(L)) –> ∏;M(y,L,z) = ∂wêI(y(u)))

(ii) Har man at:

(a) m,n,kêN,

(b) x;1,...,x;mêRgn(Var((L);1))

(c) t;1,...,t;nêTm((L);1)

(d) F;1, ... ,F;kêFm((L);1)

så er: (∏;M(y,L,z))($(x,1,...,x;m,t;1,...,t;n, F;1,...,F;k) =
∂wêI [z($)(X;1(w),...,X;n(w),Y;1,...,Y;k)(w)]

der
Y;j = ∂a;1,....,a;nêD(∏;M(y(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),L,z)(F;j)) for jê{1,...,k} og
X;i(w) = [∂a;1,....,a;nêD((∏;M(y(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),L,z)(t;i))(w))]
for iê{1, ...,n}

Vi definerer hva som menes med "x er en modell for det intensjonale språket L", – "Mod(x,L)" – ved:

Definisjon 4.3 Mod(x,L) <–> IntS(L) &
(Ez)(Ew)(x=<z,w> & MS(z) & Intepr;z(w,L))

Endelig er det nå likefrem å fiksere de vanlige semantiske begrepene i forbindelse med modeller. Vi definerer de følgende tre predikater: (a) "F er en formel i det intensjonale språket L som er sann i modellstrukturen M relativt til verditiordningen v og den mulige verden w". Dette forkortes med "True(F,L,M,v,w)". (b) "F er en formel i det intensjonale språket L som er gyldig i modellstrukturen M relativt til verditilordningen v". Dette uttrykket forkortes med: "Val(F,L,M,v)". Endelig skal vi også definere uttrykket (c) "F er en formel i det intensjonale språket L som er gyldig i modelstrukturen M". Dette forkorter vi med: "Vl(F,L,M)".

Definisjonen er nå som følger:

Definisjon 4.4(a) True(F,L,M,v,w) <–>. IntS(L) &FêFm(L)&

Mod(M,L) & Vt;((M);1)(v,L) & wê((M);1);1) & (∏;(M;1)(v,L,(M);2))‘w =1

(b) Val(F,L,M,v) <–> IntS(L) &FêFm(L)& Mod(M,L) &
Vt;((M);1)(v,L) & (Aw)(wê((M);1);1) –> True(F,L,M,v,w))

(c) Vl(F,L,M) <–> IntS(L) &FêFm(L)& Mod(M,L) &
(Av)(Vt;((M);1)(v,L) –> Val(F,L,M,v))

Det skulle være ganske klart at de begrepene som er introdusert ved Definisjon 4.4 bare er et lite utvalg av de semantiske begrepene man kan innføre i forbindelse med modeller av denne typen. Er for eksempel M en modell for L og u en formeldannende konstruksjon av type <0,n,0> i L kan vi også definere hva som menes med ekstensjonen til u i modellen M relativt til verdenen w. Videre kan man om F;1 og F;2 er to lukkede formler i L definere hva som menes med at F;1 og F;2 er synonyme i L relativt til modellen M. Kort sagt kan nesten alle de begrepene av semantisk art som vi har introdusert tidligere nå kan innføres "relativisert" til modeller i betydningen ovenfor. Man bør imidlertid merke seg at disse modellteoretiske begrepene er svært forskjellige fra de primitive semantiske begrepene som ble "plassert" i det ikke-logiske vokabularet til T;A. Det er for eksempel ingenting som sier at de mulige verdnene i en modell faktisk skal være mulige verdener eller at de mulige individene faktisk skal være mulige individer. Grunnen til dette er åpenbart at de forskjellige komponentene i en modellstruktur M, slik "modellstruktur" er definert ved Definisjon 4.1, er pålagt svært få krav. Det er bare de kravene som er nevnt i definiens. Er derfor M = <I,D,E,*,K> en modellstruktur er det ingenting som forhindrer at I f.eks. kan være mengden av alle de sandkorn som eksisterer i ørkenen Sahara ved det nuværende tidspunkt. Det er altså logisk sett fullt ut mulig å mene at teorien gitt ved definisjonene 4.1 – 4.4 er korrekt, men benekte at det i det hele tatt kan finnes noe slikt som mulige verdener.

Det bør også bemerkes at de modellteoretiske begrepene som nå er introdusert er av en rent mengdeteoretisk natur. Definisjonene ovenfor kan derfor oppfattes som et supplement til T;A, men de kan også tenkes som et supplement ZF eller ZFC.

I lys av dette er det derfor mulig å definere en teori, la oss kalle "MT" der de primitive predikatene er dem i ZFC samt alle de semantiske og syntaktiske predikatene som vi har definert tidligere i rent mengdeteoretiske termer. Den sistnevnte predikatmengden kan vi akkurat her betegne med M. "Mod(x,y)", "IntS(x)", "FS(x,y)"[1] etc. vil da være primitive predikater i L;MT – språket til teorien MT. Som ikke -logiske aksiomer har denne teorien alle ZFC-aksiomene samt de definisjonene av vi tidligere har gitt av predikatene i M. Disse oppfattes nå som definerende aksiomer. Det skulle være klart at for eksempel "MV(x)" – "x er en mulig verden" ikke kan være med i M sidenvi ikke har gitt noen ren mengdeteoretisk definisjon av dette predikatet. Vi skulle dermed ha gitt en eksplisitt beskrivelse av teorien MT i det vi bemerker at alle instanser av replacement- og utsondringsaksiomet i L;MT tenkes å inngå som ikke-logiske aksiomer i MT.

Det virker nå rimelig å hevde at svært mange semantiske resultater, f.eks. kompletthetsresultater for modal-logikker kan formuleres og bevises innenfor rammen av MT. Det er også berettiget å peke på at MT er en helt annen teori enn T;A og at T;A ikke i noen rimelig betydning kan sies å være en konsekvens av, eller implisert av MT. I T;A kvantifiserer man over mulige individer, mulige verdener, konstruksjoner som er entydige med hensyn på grunnbe-tydning etc. I MT kvantifiserer man bare over mengder. En person som aksepterer MT behøver derfor slett ikke akseptere T;A.

Dette innbærer imidlertid ikke at modellteoretiske studier nødvendigvis må foregå innenfor en rent mengdeteoretisk ramme. Slike studier kan utmerket godt bedrive innenfor rammen av f.eks. T;A eller en sterkere teori. Som nevnt ovenfor kan man føye til definisjonene 4.1 – 4.4 til T;A. Er da L for eksempel et formalt språk kan man lett tilordne L

[1] Se Definisjon 3.12

en *naturlig* modell. Dette vil være modellen definert ved M;n(L) = <Q, (L);2)> der Q= <I,D,E,*,ø> der I,D, E og * er definert slik:

(i) I = Mg(x: MV(x))
(ii) D = Mg(x: MI(x))
(iii) E = Mg(<x, Mg(y: Eksi(y,x)>: MV(x))
(iv) * = (ix)Non(x)

Man kan i denne sammenheng studere de relavante definisjonene i Kapittel I. Det er nå lett å verifisere at man i T;A kan bevise Mod(M;n(L), (L);1). Videre kan vi naturligvis bevise i T;A at M(M;n(L)), dvs. at den naturlige modellen er en mengde. Dette kan vi imidlertid ikke bevise i MT selvom vi utvider L;MT til L;A. Vi må i så tilfelle legge til de ontologiske aksiomene On1 – On10. Dette illustrerer ytterligere at man bør holde MT og T;A fra hverandre.

Det bør bemerkes at vanlige førsteordens modeller for første-ordens språk kan identifiseres med en spesiell delmengde av Mg(x: Mod(x,L)) der L er en første-ordens språkstruktur. Det følger at alle de vanlige modellteoretiske resultatene for første-ordensteorier av forskjellig art kan utledes i MT og følgelig i T;A. Dette viser at T;A i visse henseende kan anses som en svært konsekvensrik teori.

Klassen av intensjonale språkstrukturer en meget omfangsrik klasse med abstrakte språk. De vanlige språk for modal utsagnslogikk er en spesiell del-mengde av denne klassen. Tilsvarende kan de vanlige relasjonelle Kripke-modellene for denne type språk oppfattes som delmengder av den klassen av modeller vi definerte ovenfor. Det følger derfor at for eksempel alle de vanlige fullstendighets og avgjørbarhetsresultatene som er formulert og bevist for såkalte normale modale setningslogikker kan formuleres og bevises innenfor rammen av MT og derfor a fortiori innenfor T;A. For en mer detaljert redegjørelse for en rekke resultater i modal utsagnslogikk henviser vi leseren til Lemmon & Scott [1], Segerberg [1], [2], [3], Fine [1], Gabbay [1], Thommasen [1] og Sahlquist [1].

Mange andre modellbegreper enn det vi har sett på i dette kapitlet kan studeres. I en egen del av vårt arbeid vil vi forsøke å gi en mer systematisk oversikt over disse og dessuten studere modellteoretiske problemer av forskjellig art, blandt vil vi bevise en rekke fullstendighetsresultater.

***

Kapittel V

Kapittel V

§1 Det kumulative hierarki.

Vi har i forrige kapittel beskrevet von Neumanns kumulative hierarki. I dette hierarkiet inngår bare såkalte "rene" mengder. Man starter med et bunn-nivå V(0) som er nullmengden og får de andre nivåene ved gjentagne ganger å iterere potensmengde- og og sumoperasjonen. Imidlertid synes det naturlig å tenke seg at bunn-nivået, eller initialnivået, ikke bare er den tomme mengden, men snarere en ikke-tom mengde av urelementer. Man kan i så fall starte med å sette V;I(0) = Mg(x: ¬Set(x)). Dette vil da utgjøre bunn-nivået i universet. Nivå nummer 1 får man så ved å legge til alle delmengder av V;I(0)., dvs. alle mengder av urelementer. Dette innebærer at nivå nummer 1, V;I(1) vil være definert ved:

V;I(1) = V;I(0)U Pt(V;I(0))

Nivå nummer 2 får man ved å legge til alle delmengder av V;I(1) til V;I(1). Dette innebærer at:

V;I(2) = V;I(1)UPt(V;I(1))

Mer allment vil det være slik at det n+1'te nivået i hierarkiet er dannet fra det n'te ved at man legger til alle delmengder av det n'te nivå til dette selv:

V;I(n+1) = V;I(n) U Pt(V;I(n))

Det synes nå ikke å være noe i veien for at man utvider denne konstruksjons-prosessen til transfinite nivåer i det man lar V;I(w) = UN/n<w/(V;I(n)) og så fortsetter med å konstruere nivåer over V;I(w) på nøyaktig samme måte som man konstruerte nivåer over mengden av urelementer.

Generelt kan man definere dette hierarkiet V;I(a), der aêOn, ved transfinite induksjon på den følgende måte:

(i) V;I(0) = Mg(x: ¬Set(x))
(ii) V;I(a+1) = V;I(a)U Pt(V;I(a))
(iii) V;I(b) = UN/a<b/(V;I(a)) om bêK;II

Nå er alt dette naturligvis velkjent. Det skulle også være klart at man i T;A' (Se §2 i forrige kapittel) kan bevise at (Ax)((Ea)(aêOn & xêV;I(a))). Dette innebærer at enhver entitet enten hører med blandt urindividene eller med på et nivå ≥1 i dette kumulative hierarkiet.

Et spørsmål som kan stilles er hvorvidt denne oppfatningen av universet er korrekt, med andre ord om det faktisk er slik at klassen av absolutt alle entiteter som eksisterer kan dekomponeneres i en slik sekvens av nivåer indeksert på ordinaltallene. Det er kanskje berettiget å se i dette spørsmålet et grunnleggende problem av metafysisk natur. Imidlertid vil et veloverveid forsøk på å gi et svar tvinge oss til å gå nøye inn på fordelene og ulempene til de forskjellige mengeteoretiske systemene som faktisk har blitt foreslått. Videre vil det kreve at man sammenligner dem på en langt mer grundig måte enn det vi har til hensikt å gjøre her. Det vil også, såvidt jeg kan se, ytterligere tvinge en til å drøfte de argumentene som man kan fremlegge for at det er nødvendig å anta eksistensen av mengder. Vi skal ikke

gjøre dette her, men begrenser oss til å henvise til Quine [1] hvor en rekke mengdeteoretiske systemer sammenlignes og diskuteres på en klar og instruktiv måte. I denne boken drøftes også en rekke argumenter til fordel for at det er nødvendig å akseptere eksistensen av uendelige mengder om den vanlige klassiske teorien om reelle tall skal kunne bygges opp på et rent mengdeteoretisk grunnlag.

Vår begrunnelse for å basere vårt arbeid på det mengdeteoretiske grunnlag som er angitt ovenfor, ZFC, eventuelt ZFC;u, er av en mer overfladisk og provisorisk natur. Det kumulative hierarkiet, som utgjør en naturlig modell for ZFC, har et naturlig, enkelt og gjennomsiktig preg. Det er vanskelig å se hva man overhodet kan mene med "en mengde" om man ikke tenker seg at det er noe som foreligger på et eller annet nivå i dette hierarkiet.

§2 Noen bemerkninger om "trancendente" entiteter.

Siden vi har postulert M(D) i T;A følger det at D, mengden av mulige individer er et element i V(a) for noe aêOn. Det er da klart at (V(b) –D)≠ø for alle b>a. Er xê(V– D) vil derfor x være en entitet vi kvantifiserer over i T;A, men som ikke er noe element i D, dvs. som ikke er noe mulig individ. Vi vil kalle entiteter som ikke er mulige individer for trancendente entiteter. Uttrykket "TEnt(x)" brukes som forkortelse for "x er en trancendent entitet". Formelt er definisjonen denne:

Definisjon 2.1 TEnt(x) <–> xê(V – D) der V= Mg(x: x=x)

Det er nå ganske lett å bevise at en rekke entiteter som vi tidligere har omtalt er transendente i denne betydningen.

Teorem 2.2 (T;A) (Ax)(xê((2^I)^(D^n)) & n≥1 –> TEnt(x))

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at det finnes xê((2^I)^(D^n)) der xêD. Vi har at Dom(x) = D^n. Siden xêD må man ha at <x,...,x>êD^n og derfor at det finnes y slik at <<x, ... ,x>,y>êx. Men dette impliserer i lys av definisjonene av par og n-tuple at det må finnes z;1,...,z;m slik at xêz;1ê ... êz;mêx. Dette er imidlertid utelukket i lys av Fundierungsaksiomet. **Q.E.D**.

På en lignende måte kan man også gi bevis for den følgende sats:

Teorem 2.3 (T;A) (Ax)(FORM(x) & n≥1 & ((x);1);3(<0,n,0>)≠ø –> TEnt(x)

Dette teoremet sier altså at alle formale språk som inneholder n-ære predikater (n≥1) er transendente entiteter. At dette holder skulle være nokså lett å se i lys av den foregående sats, definisjonen av formalt språk samt Fundierungsaksiomet. Vi gir derfor ikke noe detaljert bevis.

Det er også nokså lett å vise:

Teorem 2.4 (T;A) b= Rank(D) & IΩ(V –V(b))≠ø –> (Ax)(FORM(x) –> TEnt(x))

Dette gjelder også følgende:

Teorem 2.5 (T;A) b= Rank(D) & IΩ(V–V(b))≠ø & SEMI;u(x) &

m,n,kêN & yê((x);1);3(<m,n,k>)U((x);1);4)(<m,n,k>). –>
Me(y,x)êMg(x: TEnt(x))[2]

Vi overlater beviset for disse to satsene til leseren.

I mangel av et bedre sted innskyter vi her en del satser om språk og intensjonale språkstrukturer:

Teorem 2.6 (T;A) (a) ¬(Ew)((Ax)(xêw <–> IntS(x))
(b) ¬(Ew)((Ax)(xêw <–> FORM(x))
(b) ¬(Ew)((Ax)(xêw <–> Språk(x))

Dette teoremet har en viss interesse siden det sier at mengden av alle intensjonale språkstrukturer, mengden av alle formale intensjonale språk og mengden av absolutt alle språk ikke eksisterer. Disse totalitetene er for store og man kan derfor ikke bevise eksistensen av dem. Også her og ved de neste satsene overlater vi beviset til leseren.

Definisjon 2.7 IntS;a(x) <–> (IntS(x) & (x);1 Inkl V(a)) (aêOn)

IntS;a(x) vil altså si at x er en intensjonal språkstruktur der uttrykksmengden i x, ie. (x);1 er inkludert i nivå a i det kumulative hierarki.

Vi har:

Teorem 2.8 (T;A) aêOn –> (Ew)((Ax)(xêw <–> IntS;a(x))

Vi bemerker også at den følgende sats holder:

Teorem 2.9 (T;A) (i) IntS(y) –> (Ez)(Intepr(z,y))
(ii) IntS(y) –> (Ez)(FORM(z) & y =(z);1)
(iii) IntS(y) –> M(Mg(z: FORM(z) & y=(z);1))

Den følgende sats sier at det til ethvert semiformalt utvetydig språk x finnes et korresponderende formalt språk y, dvs et formalt språk der intepretasjons-funksjonen i y tilordner alle konstruksjonene i x den betydningen de har i x:

Teorem 2.10 (T;A) SEMI;u(x) –>
(Ey)(FORM(y) & (x);1 = (y);1 & (Am)(An)(Ak)(m,n,kêN –>
(As)(sê((x);1);3(<m,n,k>)U((x);1);4(<m,n,k>) –> (y);2(s) = Me(s,x))

Tilslutt betrakter vi:

Teorem 2.11 (T;A) (Ax)(Språk(x) –> ¬(Ey)(FORM(y) & x = (y);2)) –>
(a) ¬(Ez)(SEMI;u(z) &FORM(z))
(b) ¬(Ez)(SEMI(z) & FORM(z))

Siden hypotesen i dette teoremet virker temmelig plausibel, den kan trolig legges til som et nytt ikke-logisk aksiom i T;A uten at noen motsigelser oppstår, er det som man ser rimelig å hevde at klassen av semiformale språk ikke har noen elementer felles med klassen av formale språk.

[2]Konsulter i denne forbindelse Sm2 og Sm3 samt Definisjon 0.27 når det gjelder betydningen til "Me(y,x)".

§3 Inter- og intraspråklig synonymitet.

Den følgende setning kan forkomme en rimelig:

(1) SetnE(x,y) & Språk(y) –> (E!z)(GMen(z,x,y)) & (iz)(GMen(z,x,y))ê(2^I)

Det er mulig at denne setningen kan anses som en rent begrepsmessig sannhet i L;A. Imidlertid synes den ikke å være utledbar i T;A og det virker heller ikke som om det skulle være noen grunn til å tro at det skulle oppstå noen motsigelser om man tenkte seg at den ble lagt til T;A som et nytt ikke-logisk aksiom. Det samme gjelder den følgende eksistensantagelse:

(2) Språk(y) –> (Ew)((Ax)(xêw <–> SetnE(x,y))

Som man ser sier denne setningen at for ethvert språk y finnes mengden av alle de semantisk entydige setningene i språket. Heller ikke denne setningen synes å være avgjørbar på grunnlag av T;A-aksiomene.

I det følgende vil vi tenke oss (1) og (2) lagt til akiomene i T;A som nye ikke-logiske aksiomer.

Det følgende er en generell temmelig generell definisjon av synonymitet. Uttrykket "Syn(x,y,z,w)" leses "Setningen x i språket y er synonym med setningen z i språket w":

Definisjon 3.1 Syn(x,y,z,w) <–> (Språk(y) & Språk(w) & SetnE(x,y) & SetnE(z,w) & (iu)GMen(u,x,y) = (iu)GMen(u,z,w))

Som man ser fra denne definisjonen kreves det at x og z er setninger i henholdsvis språkene y og w som er entydige med hensyn på grunnbetydning, at y og z faktisk er språk, og at grunnbetydningen til x i y må være den samme som grunnbetydning til z i w, for at setningen x i språket y skal være synonym med setningen z i språket w.

Definisjon 3.2 Syn;L(x,y) <–> Syn(x,L,y,L)

Syn;L(x,y) innebærer altså at x og y er semantisk entydige setninger i L som er synonyme i L. Fra de definisjonene som er blitt gitt er det lett å se at Mg(<x,y>: Syn;L(x,y)) er en ekvivalensrelasjon over Mg(x: SetnE(x,L)) om L er et eller annet språk.

På basis av disse synonymitetsbegrepene er det nå mulig å definere et nokså enkelt oversettelsesbegrep. "TL(x,y,z)" kan leses "x er en oversettelse av språket y inn i språket z":

Definisjon 3.3 TL(x,y,z) <–>. Func(x) & Dom(x) = Mg(z: SetnE(z,y)) & Rgn(x) Inkl Mg(w: SetnE(w,z)) & (Av)(vêDom(x) –> Syn(v,y, x(v),z))

Er x en oversettelse av y inn i z er altså x ganske enkelt en funksjon som avbilder alle de setningene i y som er entydige med hensyn på grunnbetydning på synonyme setninger av samme type i språket z.

Vi skal ikke her utvikle mer utførlig noen oversettelsesteori for f.eks. formale språk. Leseren kan i denne sammenheng kanskje ha interesse av Montague [2] hvor en detaljert oversettelsesteori for en temmelig omfangsrik mengde med med formale språk blir beskrevet.

Her innskrenker vi oss til å peke på noen enkle og nokså trivielle konsekvenser av de innførte definisjoner:

Teorem 3.4 (T;A) Anta at det følgende holder:
(Ax)(FORM(x) v SEMI;u(x) –> (Ay)(SetnE(y,x) <–> yêFm;c((x);1))).
Da gjelder:
(i) SEMI;u(x) –> (Ey)(FORM(y) & (Ez)(TL(z,x,y)))
(ii) SEMI;u(x) –> (Ey)(FORM(y) & (Ez)(TL(z,y,x)))

Det følgende er også en temmelig enkel konsekvens av Definisjon 3.3

Teorem 3.5 (T;A) Språk(y) & Språk(z) & Språk(v) –>.
TL(x,y,z) & TL(w,z,v) –> TL(w˚x, y,v)

Det skulle være overflødig å bemerke at det selvfølgelig ikke er slik at vilkårlige språk kan oversettes til hverandre. Påstanden (Ax)(Ay)(Språk(x) & Språk(y) –> .(Ez)TL(z,x,y) & (Ez)TL(z,y,x)) er helt sikkert uforenelig med T;A. Heller ikke er det noe som tilsier at dersom språket x kan oversettes til y så gjelder også det omvendte at y kan oversettes til språket x.

I denne forbindelse kan man nevne følgende sats:

Teorem 3.6 (T;A) Anta at det følgende holder:
(Ax)(FORM(x) v SEMI;u(x) –> (Ay)(SetnE(y,x) <–> yêFm;c((x);1))).
Da gjelder:
(i) (Ex)(Ey)(FORM(x) & FORM(y) &
¬(Ez)(TL(z,x,y)) & ¬(Ez)(TL(z,y,x)))
(ii) (Ex)(Ey)(FORM(x) & FORM(y) &
(Ez)(TL(z,x,y)) & ¬(Ez)(TL(z,y,x)))
(iii) (Ex)(Ey)(FORM(x) & FORM(y) &
(Au)(Av)(CForm(u,x) &CForm(v,y) –> ¬Syn(u,x,v,y)))

Igjen overlater vi beviset for denne satsen til leseren.

§4 Reduksjonsbegreper.

Predikatet "x kan reduseres til y" kan sikkert presiseres i et stort antall forskjellige retninger. Vi vil her innføre en del reduksjonsbegreper som virker naturlige i forbindelse med intensjonale språkstrukturer samt semiformale og formale språk. De er derfor spesielt naturlige å trekke inn i denne sammenheng. Disse begrepsdannelsene vil vi også ha en viss bruk for senere.

Vi definerer først hva som menes med at X er en rekursiv avbildning av L1 inn i L2:

Definisjon 4.1 Vi sier at X er en rekursiv avbildning av L1 inn i L2, i symboler "Ra(X,L1,L2)" hvis og bare hvis X, L1 og L2 oppfyller de følgende krav:
(i) IntS(L1) & IntS(L2)
(ii) Func(X) & Dom(X) = Tm(L1)UFm(L1) &
Rgn(X) Inkl Tm(L2)UFm(L2)
(iii) X"Fm(L1) Inkl Fm(L2) & X"Tm(L1) Inkl Tm(L2)
(iv) (Eg;1)(Eg;2)(Gød(g;1,L1) & Gød(g;2,L2) &
Rec;2(Mg(<g;1(x),g;2(x)>: <x,y>êX)))

Som det skulle fremgå av denne definisjonen er en rekursiv avbildning av den intensjonale språkstrukturen L1 inn i den intensjonale språkstrukturen L2 en avbildning X som avbilder mengden av termer i L1 inn i mengden av termer i L2 og som avbilder formlene i L1 på formler i L2. I tillegg skal avbildningen være rekursiv. Dette innebærer at gitt en vilkårlig formel F i L1 og en vilkårlig formel G i L2 så skal det være mulig å avgjøre helt mekanisk hvorvidt X(F)=G eller ikke.

Definisjon 4.3 Vi sier at X er en troverdig tolkning av det formale systemet T1 i L1 inn i det formale systemet T2 i L2, i symboler "It(X,T1,L1,T2,L2)" hvis og bare hvis følgende krav er oppfylt:

(i) FS(T1,L1) & FS(T2,L2) & Ra(X, L1,L2)
(ii) (AF)(FêFm(L1) –> (Fê(T1);3 <–> X(F)ê(T2);3))

En troverdig intepretasjon av T1 i L1 inn i T2 i L2 er med andre ord en rekursiv avbildning av L1 inn i L2 som avbilder alle teoremene i T1 på teoremer i T2 og som dessuten avbilder alle ikke-teoremer i T1 på ikke-teoremer i T2.

Definisjon 4.4 Med en meningstro intepretasjon X av det semiformale språket L1 inn i det semiformale språket L2, ISem(X,L1,L2), forstås en funksjon X som oppfyller de følgende krav:

(i) Ra(X,(L1);1, (L2);1)
(ii) SEMI;u(L1) & SEMI;u(L2)
(iii) (AF)(FêCForm((L1);1) –> Me(F,L1) = Me(X(F),L2))

En ekstentensjonalt troverdig intepretasjon er definert slik:

Definisjon 4.5 Med en ekstensjonalt troverdig intepretasjon X av det semiformale språket L1 inn i det semiformale språket L2 med hensyn på verdenen w, ESem;w(X,L1,L2), forstås en funksjon X som oppfyller de følgende krav:

(i) wêI
(ii) Ra(X,(L1);1, (L2);1)
(iii) SEMI;u(L1) & SEMI;u(L2)
(iii) (AF)(FêCForm((L1);1) –> Me(F,L1)‘w = Me(X(F),L2)‘w)

Fra disse to definisjonene følger umiddelbart:

Teorem 4.6 (T;A) Anta SEMI;u(L1) & SEMI;u(L2) og Ra(X,(L1);1, (L2);1). Da gjelder:
ISem(X,L1,L2) <–> (Aw)(wêI –> ESem;w(X,L1,L2))

Beviset for denne satsen er enkelt og overlates til leseren.

Det er mulig å introdusere et litt mer generelt intepretasjonsbegrep enn det som er innført ved Definisjon 4.4.

Man kan først definere:

Definisjon 4.7 Lan(x) <–> (SEMI;u(x) v FORM(x))

De følgende definisjoner er helt analoge med Definisjon 4.4 og Definisjon4.5:

Definisjon 4.5 Med en meningstro intepretasjon X av språket L1 inn i språket L2, Ilan(X,L1,L2), forstås en funksjon X som oppfyller de følgende krav:

(i) Ra(X,(L1);1, (L2);1)
(ii) Lan(L1) & Lan(L2)
(iii) (AF)(FêCForm((L1);1) –> Me(F,L1) = Me(X(F),L2))

En ekstentensjonalt troverdig intepretasjon er definert slik:

Definisjon 4.5 Med en ekstensjonalt troverdig intepretasjon X av språket L1 inn i språket L2 med hensyn på verdenen w, ELan;w(X,L1,L2), forstås en funksjon X som oppfyller de følgende krav:

(i) wêI
(ii) Ra(X,(L1);1, (L2);1)
(iii) Lan(L1) & Lan(L2)
(iii) (AF)(FêCForm((L1);1) –> Me(F,L1)‘w = Me(X(F),L2)‘w)

Som man ser fra disse definisjonene har man at følgende to ting holder:

(1) ISem(X,L1,L2) <–>. ILan(X.L1,L2) & SEMI;u(L1) & SEMI;u(L2)
(2) ESm;w(X,L1,L2) <–>. ELan;w(X,L1,L2) & SEMI;u(L1) & SEMI;u(L2)

En annen bemerkning bør også gjøres i forbindelse med disse to definisjonene. Fra Definijon 0.27 i Kapittel I, fremgår det at Me(w,x) = (iy)GMen(y,w,x), med andre ord at meningen til w i språket x er det objektet som er grunnbetydningen til w i dette språket. Strengt tatt har vi imidlertid ikke i forbindelse med formale språk fremsatt noe akiom som fikserer hva som er grunnbetydningen til en lukket formel i dette språket. Den følgende formel som virker svært naturlig gjør dette:

(1) FORM(x) & CForm(w,x) –>.
(iy)(GMen(y,w,x)) = (ir)((Au)(Vt(u,(x);1) –> GMen(r,w,x,u)))

Merk i forbindelse med denne formelen at "GMen(y,w,u)" leses "y er grunnbetydningen til w i språket x" og at "GMen(r,w,x,u)" leses "r er grunnbetydningen til w i språket x relativt til u". At (1) er en rimelig setning skulle fremgå fra det følgende teorem som kan utledes på grunnlag av aksiomene for formale språk FSm1 – FSm14 som inngår i T;A:

Teorem 4.5.1 (T;A) FORM(x) &CForm(w,x) –>
(E!r)((Au)(Vt(u,(x);1) –> GMen(r,w,x,u)))

Det kan også nevnes at man kan "svekke" Definisjon 4.3 noe uten at man får et helt innholdsløst begrep:

Definisjon 4.3 Vi sier at X er en tolkning av det formale systemet T1 i L1 inn i det formale systemet T2 i L2, i symboler "I(X,T1,L1,T2,L2)" hvis og bare hvis følgende krav er oppfylt:

(i) FS(T1,L1) & FS(T2,L2) & Ra(X, L1,L2)
(ii) (AF)(FêFm(L1) –> (Fê(T1);3 –> X(F)ê(T2);3))

Mens en troverdig tolkning ikke avbilder alle teoremer på teoremer, men også alle ikke-teoremer på ikke-teoremer, er kravet til en tolkning svakere: den skal bare avbilde teoremene i det ene systemet på teoremer i det andre.

§5 Noen spørsmål om konsistens.

Konsistens i forbindelse med førsteordens teorier i den betydning vi innførte dem i Kapittel III, §4, kan defineres på en nokså opplagt måte:

Definisjon 5.1x er en konsistent førsteordens teori i språket y, i symboler "Cons;f(x,y)" hvis og bare hvis Teori;f(x,y) & (x);3 SInkl Fm((y);1)

Dette innebærer at en førsteordens teori er konsistent hvis og bare hvis det finnes formler i språket til teorien som ikke er teoremer i teorien.

Poenget bak den følgende sats er i det vesentlige ganske enkelt. La oss først formulere satsen for dernest å kommentere den.

Teorem 5.2 (T;A) Anta Teori;f(x;1,y;1) & Teori;f(x;2,y;2). Anta videre at y;1= <L1,s1> og at y2 = <L2,s2>. Anta videre at I(X,x1,L1,x;2,L2) og at X dessuten oppfyller de følgende to krav:

(i) (AF)(AG)(F,GêFm(L1) –> X(–>;s1(F,G)) = –>;s2(X(F),X(G)))

(ii) (AF)(FêFm(L1) –> X(¬;s1(F)) = ¬;s;2(X(F)))

Da gjelder at :

Cons;f(x;2,y;2) –> Cons;f(x;1,y;1)

Beviset for denne satsen er temmelig likefrem om man erindrer definisjonen av hva som menes med at x er en første-ordensteori over språket y, videre husker på hva som menes med at x er en førsteordens språkstruktur, og hva som ligger i at x er en førsteordens språkstruktur med konnektivsystem s. Det kan altså i forbindelse med denne sats være gunstig å konsultere definisjonene som ble gitt i §4 i Kapittel III.

I forbindelse med teoremet ovenfor bemerker vi det følgende. Vi har så langt definert presist teoriene T;A – T;D, T;A* – T;D*. Dette er er førsteordens teorier i de tilsvarende førsteordens språkene L;A – L;D, L;A* – L;D*. Vi har også tidligere definert første-ordens språket, L;ê, språket for mengdelære og teorien ZFC i dette språket. Også denne teorien er en førsteordens teori. La nå "L;X" betegne et av språkene L;A – L;D, L;A* – L;D* og la "T;X" betegne den tilsvarende teori i rekken T;A – T;D, T;A* – T;D*. Man kan da spørre om den følgende påstand holder:

Påstand 5.3 Det finnes en en rekursiv avbildning f av mengden av formlene i L;X inn i mengden av formlene i L;ê som oppfyller de følgende krav:

(i) Er F en vilkårlig formel i L;X har man at $f(\neg F) = \neg f(F)$

(ii) Er F,G vilkårlige formler i L;X har man $f(F\&G) = f(F)\&f(G)$

(iii) Er F et teorem i T;X så er $f(F)$ et teorem i ZFC

Som man ser i lys av Teorem 5.2, vil man om denne påstanden er sann kunne konkludere med at dersom ZFC er en konsistent førsteordens teori så må også T;X være det. Siden det slett ikke er likgyldig om de diverse T;X er konsistente relativt til ZFC er det selvfølgelig ganske viktig å kunne avgjøre om Påstand 5.3 er riktig eller ikke.

Vi gjetter på at Påstand 5.3 er riktig, men lar det forbli en gjetning fordi vi ikke har gjennomført noe detaljert bevis for påstanden. Et detaljert bevis vil bli, som man sikkert skjønner, meget langtekkelig og delvis komplisert på grunn av kompleksiteten til teoriene i familien T;X. Men i prinsippet skulle bevisidéen være meget enkel. Det mest naturlige

synes å være at man for det første gir eksplisitte definisjoner av alle de ikke-logiske predikatene som inngår i L;X, men ikke i L;ê, ved hjelp av dem som bare inngår i L;ê. Dernest må man vise at man ved hjelp av disse definisjonene kan transformere alle de ikke-logiske og logiske aksiomene i T;X til formler som det lar seg gjøre å vise at er teoremer i ZFC. For det tredje må man vise det følgende når det gjelder slutningsreglene modus ponens og universell generalisering: (a) Er G sluttet fra F–>G og G så må f(G) være et teorem i ZFC om f(F–>G) og f(F) er det. (b) Er (Ax)F sluttet fra F så må f(Ax)F) være et teorem i ZFC om f(F) er det.

§6 Et identitetskriterium for mulige verdener.

Innenfor klassen av de formale språk kan man utskille en mengde med språk som man kan kalle for "komplette". Vi definerer "L er et komplett formalt språk", i symboler "FORM;c(x)" slik:

Definisjon 6.1L er et komplett formalt språk, FORM;c(L), hvis og bare hvis L oppfyller de følgende krav:

(a) FORM(L)
(b) Er m,n,kêN gjelder:[3]
  (i) Rest((L);2, P;<m,n,k>) : P;<m,n,k> –(1-1,på)–> Q1(m,n,k)
  (ii) Rest((L);2, C;<m,n,k>) : C;<m,n,k> –(1-1,på)–> Q2(m,n,k)

Vi har med andre ord at L er et komplett formalt språk hvis og bare hvis det er slik at intepretasjonsfunksjonen i L, den andre komponenten i språket L, tilordner en-entydig de diverse konstruksjonene i P;<m,n,k> på funksjonene i Q1(m,n,k) for alle m,n,kêN og det samme gjelder konstruksjonene i C;<m,n,k>. Dette innebærer at dersom f er et eller annet element i Q1(m,n,k) for noen m,n,kêN så finnes det en formeldannende konstrukjon av type <m,n,k>, la oss kalle den $;f, som intepretasjonsfunksjonen i L tilordner f. Tilsvarende vil det være slik at dersom g er en eller annen funksjon som er med i Q2(m,n,k) så finnes det en termdannende konstruksjon av type <m,n,k>, la oss si $;g som intepretasjonsfunksjonen i L tilordner g. Hvis vi antar at I og D er overtellbare mengder er det klart at Q1(m,nk) såvel som Q2(m,n,k) er overtellbare. I såfall vil et formalt språk som er "komplett" i denne betydningen helt klart måtte være et overtellbart språk.

Man kan vise innenfor rammen av T;A at komplette formale språk i denne betydningen eksisterer:

Teorem 6.2 (T;A) (EL)(FORM;c(L))

Den følgende setningen gir en et tilstrekkelig og nødvendig vilkår for at to mulige verdener er identiske:

Teorem 6.2 (T;A) (Aw;1)(Aw;2)(w;1,w;2êI –> (w;1 = w;2 <–>
(AL)(FORM;c(L) –>
Mg(F: FêCForm(L) & Sann(F,L,w;1)) =
Mg(F: FêCForm(L) & Sann(F,L,w;1)))))

[3] "Rest((L);2,P;<mn,k>)" betegner restriksjonen av intepretasjonsfunksjonen (L);2 i L til konstruksjonene i mengden P;<m,n,k>. Tilsvarende betegner "Rest((L);2,C;<mn,k>)" restriksjonen av (L);2 til mengden av konstruksjoner i C;<m,n,k>. Generelt betegner "Rest(f,a)" restriksjonen av funksjonen f til mengden a, dvs. funksjonen f med domenet berenset til a.

Denne setningen har et korollar som kan formuleres slik:

Korollar 6.3 (T;A) Anta w;1,w;2 er mulige verdener. Anta videre at følgende holder:
(AL)(FORM(L) –> (AF)(SetnE(F,L) <–> CForm(F,L)))
Da har man at w;1=w;2 hvis og bare hvis følgende betingelse holder:
(AL)(Språk(L) –>
Mg(F: SetnE(F,L) & Sann(F,L,w;1)) =
Mg(F: SetnE(F,L) & Sann(F,L,w;1)))))

Her har vi faktisk foran oss et identitetskriterium for mulige verdener. Det er selvfølgelig av en generell teoretisk natur og gir en åpenbart ikke noen "praktisk" eller "operasjonell" prosedyre for hvordan man skal gå frem for å avgjøre om to verdener er identiske eller ikke. Noe slikt "operasjonelt" identitetskriterium finnes imidlertid heller ikke for entiteter som vanligvis blir sett på som velindividuerte, for eksempel mengder. Hvis man anser predikatene "L er et språk", "F er en setning i språket L som er entydig med hensyn på grunnbetydning" og "F er en setning i L som er sann i verdenen w" som meningsfulle og forholdsvis "klare", synes det ikke helt urimelig å se i formuleringen ovenfor hva man kunne kalle et tilfredstillende identitetskriterium for mulige verdener.
Enn mer, hvis man ønsker å konstruere en definisjon av uttrykket "x er et tilfredstillende identitetskriterium for mulige verdener" virker det heller ikke uberettiget å kreve at definisjonen bør formuleres slik at Korollar 6.3 kan oppfattes som et slikt kriterium.

§7 To reduksjonspåstander og noen teoremer om formale språk.

Vi definerer de følgende konstruksjoner over E;1:

Definisjon 0.1
(i) A = ∂<x,y>êE;1^2(For alle (z) er det slik at y)
(ii) –> = ∂<x,y>êE;1^2((Hvis det er slik at (x) så er det slik at (y)))
(iii) ¬ = ∂xêE;1((Det er ikke slik at (x)))
(iv) Id = ∂<x,y>êE;1^2((x) er identisk med (y))
(v) ê = ∂<x,y>êE;1^2((x) er medlem av (y))

Definer så videre et konstruksjonssystem over <E;1, Var;0> ved:

Definisjon 0.2 Vi lar <X;0, Y;0> være konstruksjonssystemet der X;0 og Y;0 er de to funksjonene som oppfyller de følgende krav:
(i) Dom(X;0) = Dom(Y;0) = N^3
(ii) X;0(<1,0,1>) = {A}
(iii) X;0(<0,0,1>) = {¬}
(iv) X;0(<0,0,2>) = { –>}
(v) X;0(<0,2,0>) = {Id,ê}
(vi) Er <m,n,k>ê(N^3 –{<1,0,1>,<0,0,1>,<0,0,2>,<0,2,0>}) så er X;0(<m,n,k>) = ø
(vii) Er <m,n,k>êN^3 så er Y;0(<m,n,k>) = ø.

Vi lar Le betegne den intensjonale språkstrukturen som er bestemt av E;1,Var;0 og konstruksjonssytemet som er spesifisert i kraft av Definisjon 0.2. Sagt på en annen måte setter vi:

Definisjon 0.3 Le = L[X;0,Y;0,E;1,Var;0]

Man ser at Le er det vanlige språket som ZFC formuleres i. Det skulle være klart hvordan man helt presist i Le kan avgrense mengden av alle de formler som er universelle lukninger av ZFC-aksiomer. Det er neppe nødvendig å formulere denne mengden helt eksplisitt og formelt. I det følgende vil den bli betegnet med "ZFC*". Vi har derfor at ZFC* Inkl Fm;c(Le).

Definisjon 0.4 Konjunksjon av de universelle lukningene av de følgende formler i L;A betegnes med "A":

(1) Xê(2^I)^D & yêI –>
(Me(A,<Le,n;0>)(X)(y)) =1 <–> (Az)(zêD –> (X(z))(y) =1)

(2) X,Yê(2^I) & yêI –>
(Me(–>,<Le,n;0>)(X,Y)(y)) =1 <–> (X(y) =1 –> Y(y)=1)

(3) Xê(2^I) –> (Me(¬,<Le,n;0>)(X)(y)) =1 <–> X(y)=0

(4) z,wêD & yêI –> ((Me(=,<Le,n;0>)(z,w))(y)=1 <–> z=w)

(5) z,wêD & yêI –> ((Me(ê,<Le,n;0>)(z,w))(y)=1 <–> zêw)

(6) (AF)(FêZFC* –> (Ay)(yêI –> Me(F,<L;e,n;0>))‘y =1)

Den følgende formel i L;A vil her bli kalt for den mengdeteoretiske reduksjonspåstand for semiformale språk:

Re1 SEMI;u(<Le,n;0>) & A & (Ax)(SEMI;u(x) –> (Ez)(TL(z,x,<Le,n;0>))

Som man ser sier denne setningen i hovedsaksen at <Le,n;0> er et semiformaltutvetydig språk og at ethvert semiformalt språk kan oversettes til dette. Dette er en ganske dristig påstand. Det bør nevnes at Re1 neppe er noe teorem i T;A. Setningen impliserer at ZFC er konsistent. Var den derfor bevisbar i T;A ville det finnes et bevis for den i denne teorien. Er imidlertid Påstand 5.3 riktig kan T;A reduseres til ZFC. Dette innebærer at også dette beviset kunne overføres til ZFC noe som ville innebære at man innenfor rammen av ZFC ville kunne bevise konsistensen av ZFC. Men dette strider mot Gødels resultater i Gødel [1]. Intet av dette forhindrer imidlertid at Re1 kan legges til som et nytt aksiom til T;A om man ønsker det. Men sannsynligvis er tesen uriktig slik at det ikke er noen spesielle grunner for å gjøre dette. Tesen betraktes her urelukkende for å gi leseren et eksempel på hva slags påstander om oversettbarhet og reduksjon som kan formuleres innenfor rammen av T;A.

Man kan sammenligne Re1 med den følgende sats som faktisk er et teorem i T;A:

Teorem 7.1 (T;A) Anta at det følgende holder:
(Ax)(FORM(x)v SEMI;u(x) –> (Ay)(SetnE(y,x) <–> yêFm;c((x);1)))
Da gjelder: (Ax)(FORM;c(x) –> (Ay)(SEMI;u(y) –> (Ez)TL(z,y,x)))

Denne setningen har en viss interesse fordi den sier at at alle "komplette" formale språk er universelle i den forstand at ethvert semiformalt utvetydig språk kan oversettes til et slikt språk. I lys av Teorem 6.2 har man at det følgende korollar til Teorem 7.1 holder:

Teorem 7.2 (T;A) Anta at det følgende holder:
(Ax)(FORM(x)v SEMI;u(x) –> (Ay)(SetnE(y,x) <–> yêFm;c((x);1)))
Da gjelder: (Ex)(FORM;c(x) & (Ay)(SEMI;u(y) –> (Ez)TL(z,y,x)))

Beviset for Teorem 7.1 overlates til leseren.

Man kan også sammenligne Re1 med den følgende setning som er meget sterkere og følgelig impliserer Re1:

Re2 SEMI;u(<Le,n;0>) & A & (Ax)(FORM;c(x) –> (Ez)(TL(z,x,<Le,n;0>))

Som det ble nevnt rett ovenfor ser man at det følgende holder:

Teorem 7.3 (T;A) Re2 –> Re1

Som nevnt er Re2 en meget sterk påstand. Man har:

Teorem 7.4 (T;A) Re2 –> Cd(I) < Aleph;0

I dette teoremet er imidlertid hypotesen overflødig sterk. Man kan innenfor rammen av T;A bevise en meget sterkere sats:

Teorem 7.5 (T;A) Anta at det følgende holder:
(Ax)(FORM(x) –> (Ay)(SetnE(y,x) <–> yêFm;c((x);1)))
Da gjelder: (Ey)(FORM(y) & Cd(Fm((y);1)) < 2^Aleph;0 &
(Ax)(FORM;c(x) –> (Ez)(TL(z,x,y)))) –> Cd(I) < Aleph;0

Som man ser impliserer Re2 antesedenten i Teorem 7.5. Dette resultatet kan forøvrig generaliseres til:

Teorem 7.6 (T;A) Anta at det følgende holder:
(Ax)(FORM(x) –> (Ay)(SetnE(y,x) <–> yêFm;c((x);1)))
Da gjelder: (Ey)(FORM(y) & Cd(Fm((y);1)) < 2^Aleph;a &
(Ax)(FORM;c(x) –> (Ez)(TL(z,x,y)))) –> Cd(I) < Aleph;a der aêOn

Setter man her a=0 får man satsen ovenfor.

La oss også nevne at man har:

Teorem 7.7 (T;A) Anta at det følgende holder:
(Ax)(FORM(x) –> (Ay)(SetnE(y,x) <–> yêFm;c((x);1)))
Da gjelder: (Ey)(FORM(y) & Cd(Fm((y);1)) < 2^Aleph;a &
(Ax)(FORM;c(x) –> (Ez)(TL(z,x,y)))) < –>. Cd(I) < Aleph;a der aêOn

Jeg skal nå nevne noen andre satser av mer elementær karakter som det er nærliggende å ta opp i forbindelse med dem som er allerede er nevnt.

Først gir vi definisjoner av predikatene "x er et spesifiserbart attributt i L" og " x er et formalt språk med normal allkvantor, konjunksjons og negasjons-operator". Disse to predikatene forkortes med henholdsvis "Spes(x,L)" og "N;Q(x)".

Definisjon 7.8 Spes(x,L) <–>. FORM(L) & (En)(nêN & xê(2^I)^(D^n) &
(EF)(FêForm((L);1) & Fr(F,(L);1) = {x;(k;1),....,x;(k;n)} & Cd(Fr(F,(L);1)) =n &

(Ev)(Vt(v,(L);1) & x=
∂a;1,....,a;nêD(∏(v(x;(k;1),...,x;(k;n)/a;1,...,a;n), (L);1,(L)2)(F)))))

Her bør det nevnes at "Fr(x,(L);1)" er definert ved:

Definisjon 7.9 Fr(x,(L);1) = Mg(y: Fri(y,x,(L);1))

Vi minner i forbindelse med denne definisjonen om Definisjon 2.4 i §2 i Kapittel III.

Definisjon 7.10 Vi har at N;Q(L) hvis og bare hvis L oppfyller de følgende krav:

(i) FORM(L)

(ii) Det finnes yêP;<1,0,1>((L);1) der:
(Aw)(AX)(wêI & Xê((2^I)^D) –>.
(((L);2)(y)(X))‘w =1 <–> (Aa)(aêD –> X(a)‘w =1))

(iii) Det finnes yêP;<0,0,2>((L);1) der:
(Aw)(AX)(AY)(X,Yê(2^I) & wêI –>.
(((L);2)(y)(X,Y))‘w =1 <–> X(w) = Y(w) =1)

(iv) (iii) Det finnes yêP;<0,0,1>((L);1) der:
(Aw)(AX)(Xê(2^I) & wêI –>.
(((L);2)(y)(X))‘w =1 <–> X(w) = 0)

Det teoremet vi ønsker å presentere kan nå formuleres på den følgende måte:

Teorem 7.11 (T;A) Anta at det følgende holder:
(Ax)(FORM(x) –> (Ay)(SetnE(y,x) <–> yêFm;c((x);1)))
Da gjelder:
(Ax)(N;Q(x) & (Ay)(yêUN/nêN/[((2^I)^(D^n)] –> Spes(y,x)) –>
(AL)(FORM(L) –> (Ez)TL(z,L,x))

Det bør også nevnes at man også kan bevise:

Teorem 7.12 (T;A)

(i) (EL)(N;Q(L) &(Ay)(yêUN/nêN/[((2^I)^(D^n)] –> Spes(y,x)))

(ii) FORM;c(L) –>.
N;Q(L) & (Ay)(yêUN/nêN/[((2^I)^(D^n)] –> Spes(y,x))

Merk her at den første delen av dette teoremet følger fra den siste sammen med Teorem 6.2.

Tilslutt nevner vi den følgende sats:

Teorem 7.12 (T;A) Pr(Mg(x: FORM;c(x)))

Vi minner om at når det gjelder uttrykket Pr(A) er dette defininert ved Definisjon 1.5 i Kapittel III.

§8 Teorimangfoldet.

I denne paragrafen vil vi bevise en del satser angående kardinaltallet til forskjellige utsagnsmengder i komplette formale språk. Imidlertid trenger vi først noen definisjoner:

Definisjon 8.1C(w) = Mg(x: Utsagn(x) & x(w) =1)

C(w), om w er en mulig verden, er derfor klassen av alle de utsagn som er sanne i verdenen w.

Definisjon 8.2 Anta Δ Inkl CForm(L) & FORM(L) & X Inkl Mg(x: Utsagn(x)).
Da setter vi:

D;L(Δ,X) <–> (Ef)(Cor(f) & Dom(f)=Δ &
(Ay)(yêX –> (Ez)(zêΔ & y= Me(z,L) & y= f(z))))

Den følgende sats er et av hovedresultatene i denne paragrafen:

Teorem 8.3 (T;A) Anta $w \leq$ Cd(I) = Aleph;b < Aleph;a = Cd(D) der a,bêOn og at FORM;c(L). Da gjelder:

(i) Cd(Mg(x: Teori(x))) = Cd(2^(2^(Aleph;b)))
(ii) Cd(Fm((L);1)) = Cd(2^(2^Aleph;a))
(iii) (AF)(FêCForm(L) –>
Cd(Mg(G: GêCForm(L) & Syn;L(G,F))) = Cd(2^(2^(Aleph;a))))
(iv) (Aw)(wêI –> Cd(C(w)) = Cd(2^Aleph;b))
(v) (Aw)(wêI –> Cd[UN(Mg(z: D;L(z,C(w))))] = Cd[2^(2^(Aleph;a))])

Bevis: (i) Man har at Mg(x: Teori(x)) = Mg(x: x Inkl (2^I)) = Pt((2^I)). Videre har man at Pt(I) ~ 2^I. Siden dette er tilfelle følger det at
Mg(x: Teori(x)) ~ Pt(Pt(I)). Herav har man: Cd(Mg(x: Teori(x))) = 2^(2^(Aleph;b)) siden vi i lys av forutsetningene i satsen har Cd(I) = Aleph;b.

(ii) Man har for alle m,n,k at:
(0) Q1(m,n,k) = AXB der A= ((D;*)^(D^m))^n og B=((2^I)^(D^m))^k.
I lys av forutsetningene i teoremet har man at Cd(D;*) = Aleph;a og derfor at
(1) Cd((D;*)^(D^m)) = Cd(Aleph;a^Aleph;a) = 2^Aleph;a. Man kan i denne forbindelse konsultere Teorem TZ 11.19. Videre har vi Cd(2^I)) = 2^Aleph;b og at Cd(D^m) = Aleph;a siden mêN. Det følger derfor at:
(2) Cd((2^I)^(D^m)) = Cd((2^Aleph;b)^Aleph;a)
Nå har vi videre:
Cd((D;*^(D^m))^n) = Cd((2^Alepha)^n) = Cd(2^Aleph;a) i kraft av (1). Dessuten har man
Cd(((2^I)^(D^m))^k) = Cd(((2^Aleph;b)^Aleph;a))^k) =
Cd((2^Aleph;b)^Aleph;a)
i kraft av (2) samt de to teoremene Teorem TZ10.33 og Teorem TZ 10.34. I lys av alt dette kan man nå slutte:
(3) Cd(J) = Cd([((D;*)^(D^m))^n]X[((2^I)^(D^m))^k]) =
Cd((2^Aleph;a)X((2^Aleph;b)^Aleph;a)) =
Max([2^Aleph;a], [(2^Aleph;b)^Aleph;a]) i det man tar i betraktning Teorem TZ 10.35 og forutsetningene i teoremet.
Nå har man (4) Cd(2^Aleph;b) < Cd(2^Aleph;a) siden man etter forutsetningene har Aleph;b < Aleph;a. Det følger derfor at
(5) $2 \leq$ Cd(2^Aleph;b) $\leq$ Cd(Pt(Aleph;a)) I lys av Teorem TZ 11.18 og det faktum at Inf(Aleph;a) har man:
(6) Cd((2^Aleph;b)^Aleph;a)) = Cd(Pt(Aleph;a)) = Cd(2^Aleph;a)

Dette, (3) og (4) impliserer (7) Cd(J) = Cd(2^Aleph;a). Fra dette, (0) og (3) kan man så slutte: (8) Cd(Q1(m,n,k)) = Cd((2^Aleph;b)^(2^Aleph;a)) som igjen, i lys av Teorem TZ 11.18, det faktum at Inf(2^Aleph;a) samt det faktum at:

2≤ Cd(2^Aleph;b) ≤ Cd(Pt(2^Aleph;a)) gir en:

(9) Cd(Q1(m,n,k)) = Cd(2^(2^Aleph;a)).

Nå har man at Cd(D;*^I) = Cd(Aleph;a^Aleph;b). Derfor:

(10) Cd(Q2(m,n,k)) = Cd((D;*^I)^[((D;*)^(D^m))^n X((2^I)^(D^m))^k]) =
Cd((Aleph;b^Aleph;a)^(2^Alpeh;a))

Ved hjelp av Teorem TZ 11.19 har man:

Aleph;b≤Aleph;a –> Cd(Aleph;b^Aleph;a) = Cd(2^Aleph;a)

og derfor ved hjelp av forutsetningene i teoremet at

(11) Cd(Aleph;b^Aleph;a) = Cd(2^Aleph;a). (10) og (11) gir en:

(12) Cd(Q2(m,n,k)) = Cd((2^Aleph;a)^(2^Aleph;a)) = Cd(2^(2^Aleph;a)). Dette siste kan igjen rettferdiggjøres ved å henvise til Teorem TZ 11.19.

Nå har vi Cd(N) = Aleph;0 og derfor at Cd(N^3) = Aleph;0. Videre har man at (13) Func(Qi) & Dom(Qi) Inkl N^3 for i=1,2. Videre har man i lys av (9) og (12) at:

(14) (Ax)(xêN^3 –> Cd(Qi(x)) ≤ Cd(2^(2^Aleph;a)) (i=1,2)

Ved hjelp av Teorem TZ 11.12 kan man da slutte:

(15) Cd(UN(Qi " N^3)) ≤ Cd((2^(2^Aleph;a)X N^3) =
Max(Cd(2^(2^Aleph;a)), Cd(N^3)) = Cd(2^(2^Aleph;a)) (i=1,2).

Fra (9), (12) og (15) følger:

(16) Cd(UN/m,n,kêN/(Qi(m,n,k))) = Cd(2^(2^Aleph;a)) (i=1,2)

I kraft av (16) har man om man setter:

H = UN/m,n,kêN/(Q1(m,n,k)) U UN/m,n,kêN/(Q2(m,n,k))

at:

(17) Cd(H) = Cd(UN/m,n,kêN/(Q1(m,n,k)) U UN/m,n,kêN/(Q2(m,n,k))) ≤
Cd((2^(2^Aleph;a))X(2^(2^Aleph;a))) = Cd(2^(2^Aleph;a)).

På den annen side er det også klart at Cd(H) ≥ Cd(2^(2^Aleph;a)). Det følger at man har (18) Cd(H) = Cd(2^(2^Aleph;a)).

Siden FORM;c(L) følger det at (19) H ~ Constr(L). Videre har man at (20) Cd(Rgn(Var((L);1))) = Aleph;0. Ved hjelp av (18) og forutsetningene i satsen kan man derfor slutte:

(21) Cd(P) = Cd(Constr(L) U Rgn(Var((L);1))) = Cd(2^(2^Aleph;a))

Det skulle også være klart at Fm((L);1) ~ UN/nêN/(P^n). I lys av (21) og TeoremTZ 11.12 har man: Cd(UN/nêN/(P^n)) = Cd(2^(2^Aleph;a)) og derfor at Cd(Fm((L);1)) = Cd(2^(2^Aleph;a))

(iii) Siden FORM;c(L) finnes en konstruksjon &ê P;<0,0,2>((L);1) og en konstruksjon ¬êP;<0,0,1>((L);1) som er slik at:

(1) ((L);2)(&)(X,Y)(w)=1 <–> X(w) = Y(w) = 1

(2) ((L);2)(¬)(X)(w)=1 <–> X(w) = 0

om X,Y ê (2^I) og wêI.

Dette innebærer at dersom FêCForm(L) så har man at

(3) Syn;L(F, F&(¬(G&¬G))) for alle GêCForm(L). Det følger herav at:

(4) Fm((L);1) ~ CForm(L) « Mg(F: FêCForm(L) & Syn;L(F,G)) om GêCForm(L). Videre har vi naturligvis:

(5) Mg(F: FêCForm(L) & Syn;L(F,G)) « CForm(L) « Fm((L);1)

Fra (4) og (5) samt det som ble bevist under punkt (ii) har man åpenbart at Cd(Mg(F: FêCForm(L) & Syn;L(F,G))) = Cd(2^(2^Aleph;a)).

(iv) Det skulle være nokså lett å innse at man har ((2^I) – C(w)) ~ C(w) om wêI. Videre har man naturligvis C(w) U (2^I)– C(w)) = (2^I) og at Cd(2^I) = Cd(2^Aleph;b). Siden Cd(I) ≥ Aleph;0 har man Cd(C(w))≥ Aleph;0. Anta for reduktio ad absurdum at Cd(C(w)) < 2^Aleph;b. Da har vi ved hjelp av Teorem TZ 10.35 siden Cd(C(w)) ≥Aleph;0 & Cd((2^I) – C(w)) ≥Aleph;0 at

Cd(2^I) = Cd(C(w) U ((2^I) –C(w))) = Max(Cd(C(w)), Cd((2^I)– C(w))) =
Cd(C(w)) < Cd(2^Aleph;b) = Cd(2^I)

som helt klart er umulig.

Siden C(w) Inkl (2^I) følger det at Cd(C(w)) = Cd(2^Aleph;b).

(v) Dette punktet følger lett ved hjelp av det som ble bevist under punkt (ii) og (iii). Vi overlater her detaljene til leseren

Dette avlutter vårt bevis for Teorem 8.3. **Q.E.D.**

Begrepet "x er en konsistent teori i L" er definert ved:

Definisjon 8.4

(a) Teori(x,L) <–> x Inkl Mg(z: CForm(z,L))
(b) DTeori(x,L) <–> Teori(x,L) & (Aw)(Knv(x,w,L) –>wêx)
(c) Cons;L(x) <–>. x Inkl Mg(y: CForm(y,L) &
Mg(w: Knv(x,w,L)) SInkl CForm(L))

I forbindelse med denne definisjonen bør man konsultere definisjonen som ble gitt av "Knv(Δ,x,L)" i Kapittel III, §3. "Knv(Δ,x,L)" leses "Setningen x er en konsekvens av setningene i mengden Δ i L".

Videre er uttrykket "x er en maksimalt konsistent teori i L", i symboler "xêMax;T(L)" definert slik:

Definisjon 8.5 Max;T(L) = Mg(x: Cons;L(x) & DTeori(x,L)
(AF)(FêCForm(L) & ¬(Fêx). –> ¬Cons;L(xU{F})))

Max;T(L) er altså klassen av alle maksimalt konsistente setningsmengder i språket L. Det følgende teorem er en forholdsvis enkel konsekvens av definisjonene ovenfor:

Teorem 8.6 (T;A) FORM;c(L) –>. xêMax;T(L) <–>
(Ew)(wêI & x = Mg(F: CForm(F,L) & Sann(F,L,w)))

Det er heller ikke så vanskelig å se at det følgende må være et teorem i T;A:

Teorem 8.7 (T;A) Anta Cd(I) = Aleph;b < Aleph;a = Cd(D) der a,bêOn. Anta videre at man har FORM;c(L). Da gjelder Cd(Max;T(L)) = Aleph;b

Vi skal nå gi bevis for den følgende setning:

Teorem 8.8 (T;A) Anta Cd(I) = Aleph;b < Aleph;a = Cd(D) der a,bêOn. Anta videre at man har FORM;c(L). Da gjelder:

(Aw)(wêI –> Cd[Mg(z: D;L(z,C(w)))] = Cd([2^(2^(Aleph;a)]^(2^Aleph;b)))

Bevis: Definer først en funksjon q der Dom(w) = C(w) ved:

(1) q(x) = Mg(F: FêCForm(L) & Me(F,L) = x).

I lys av Teorem 8.3, punkt (iii), har man da Cd(q(x)) = Cd(2^(2^Aleph;a)) for alle xêC(w). Videre må man nokså åpenbart ha:

(2) Cd(a) =Cd(Mg(z: D;L(z,C(w)))) = Cd[Prod/xêC(w)/(q(x))] [4] siden det er lett å avbilde Mg(z: D;L(z,C(w))) en-entydig på Prod/xêC(w)/(q(x)). Det skulle også være klart at

(3) Prod/xêC(w)/(q(x)) Inkl CForm(L)^(C(w)). I lys av (2) må man derfor kunne slutte:

(4) Cd(a) ≤ Cd(CForm(L)^(C(w)))

Det gjenstår bare å vis at CForm(L)^(C(w)) kan avbildes en-entydig inn i Prod/xêC(w)/(q(x)). Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan man utlede eksistensen av en funksjon s som er slik at Dom(s) = Mg(q(x): xêC(w)) og der s(q(x))êq(x) for alle xêC(w). Vi setter t(x) = s(q(x)) om xêC(w). Da har man at:

têProd/xêC(w)/(q(x)). Anta f er med i CForm(L)^(C(w)). Da definerer vi h(f) slik på C(w):

h(f)‘x <–>. t(x) & ¬(f(x) & ¬f(x)) der & og ¬ er valgt ut som i beviset for Teorem 8.3, punkt (iii). Det skulle ikke være spesielt vanskelig å se at man må ha h(f)ê Prod/xêC(w)/(q(x)) og at h er en-entydig. Men da:

Cd[Prod/xêC(w)/(q(x))] = Cd[CForm(L)^(C(w))] =
Cd[[2^(2^(Aleph;a)]^(2^Aleph;b)]

i lys av Teorem 8.3. Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

Vi definerer:

Definisjon 8.9 Cons(x) <–>. Teori(x) & (Ew)(wêI & (Ay)(yêx –> y(w)=1))

Cons(x) innebærer at x er en konsistent teori. Analogt med Definisjon 8.5 kan man også definere:

Definisjon 8.10 (a) DTeori(x) <–>. Teori(x) & (Ay)(Utsagn(y) &
¬(Ew)(wêI & (Az)(zêx –> z(w)=1) & y(w)=0). –> yêx)

(b) Max;T = Mg(x: DTeori(x) & Cons(x) &
(Ay)(Utsagn(y) & ¬(yêx). –> ¬Cons(xU{y})))

Vi er nå interessert i den følgende påstand:

Teorem 8.12 (T;A) Cd(I) = Aleph;b > Aleph;0 –>
Cd(Mg(x: Cons(x))) = Cd(2^(2^Aleph;b))

Bevis: Nå er det slik at man kan vise at enhver konsistent teori i betydningen ovenfor kan utvides til en maksimalt konsistent teori. På den annen side er det klart at enhver delmengde av en maksimalt konsistent teori er en konsistent teori. Ma må altså ha:

(0) (Ax)(Cons(x) –> (Ez)(zêMax;T & x Inkl z))

Herav:

(1) Mg(x: Cons(x)) = Mg(x: (Ez)(zeMax;T & xêPt(z)))

I lys av forutsetningen i teoremet har man (2) Cd(Max;T)) = Cd(Aleph;b) og følgelig, siden zêMax;T <–> (Ew)(wêI & z= C(w)), at:

(3) (Az)(zêMax;T –> Cd(Pt(z)) = Cd(2^(2^Aleph;b)))

Videre har vi om F= Mg(<x,Pt(x)>: xêMax;T) at Func(F). Derfor:

---

[4] Merk at Prod/xêA/(f(x)) er definert ved
Prod/xêA/(f(x)) = Mg(y: Func(y) & Dom(y) =A & (Az)(zêA –> y(z)êf(z)))

Cd(UN(F"Max;T)) ≤ Cd((2^(2^Aleph;b))XAleph;b) = Cd(2^(2^Aleph;b))
Men Mg(x: Cons(x)) = UN(F"Max;T) i lys av (1). Derfor:
Cd(Mg(x: Cons(x))) ≤ Cd(2^(2^Aleph;b))
På den annen side har man: (Az)(zêMax;T –> Pt(z) « Mg(x: Cons(x))) og derfor:
Cd(2^(2^Aleph;b)) ≤ Cd(Mg(x: Cons(x))) ≤ Cd(2^(2^Aleph;b)). **Q.E.D.**

La oss tilslutt nevne den følgende sats:

Teorem 8.13 Anta FORM;c(L) & Cd(I)= Aleph;b < Aleph;a = Cd(D). Da gjelder:
(a) Cd(Mg(x: Cons;L(x))) = Cd(2^g) der g = (2^(2^Aleph;a)).
(b) Cd(Mg(x: Cons;L(x) & DTeori(x,L))) = (2^Aleph;b)

Bevis: (a) Man har faktisk at:
(1) FORM;c(L) –> (Ax)(Cons;L(x) <–> (Ey)(x Inkl y & yêMax;T(L)))
Nå er det også slik at man må ha:
(2) FORM;c(L) –> (Ay)(yêMax;T(L) –> Cd(y) = Cd(2^(2^Aleph;a))) i lys av forutsetningene i teoremet og Teorem 8.3. Fra dette og forutsetningene i satsen kan man slutte:
(3) (Ay)(yêMax;T(L) –> Cd(Pt(y)) = Cd(2^(2^(2^Aleph;a)))).
Men da må man ha om man setter F2 = Mg(<y,Pt(y)>: yêMax;T(L)) at:
Cd(UN(F2"Max;T(L))) ≤ Cd(2^gX g) = Cd(2^g) der g = 2^(2^Aleph;a).
Men UN(F2"Max;T(L)) = Cons;L(x). Det følger derfor at:
(4) Cd(Mg(x: Cons;L(x))) ≤ Cd(2^(2^(2^Aleph;a))).
På den annen side har man: (Ay)(yêMax;T(L) –> Pt(y) Inkl Mg(x: Cons;L(x)). Følgelig kan man i lys av (3) og (4) konkludere med:
Cd(Mg(x: Cons;L(x))) = Cd(2^(2^(2^Aleph;a))).
(b) Det er ikke spesielt vanskelig å bevise, dersom L er et komplett formalt språk, at klassen av alle de deduktivt lukkede konsistente teoriene i L kan en-entydig avbildes på klassen av utsagn. Men kardinaltallet til klassen av utsagn er 2^Aleph;b i lys av forutsetningene. Dette viser at påstanden under (b) holder. **Q.E.D.**

***

Kapittel VI

Kapittel VI

§0 Innledende bemerkninger.

I dette avsnittet vil vi gi leseren en oversikt over visse elementære, men ikke desto mindre viktige, teoremer som kan utledes i teoriene T;A, T;C, T;A* og T;C*. Dette kan bidra til at man får et klarere inntrykk av forskjellene og likhetene mellom disse teoriene. Vi vil ikke behandle teoriene T;B, T;D, T;B* og T;D* her, men derimot gi en tilsvarende oversikt for dem i det neste avsnittet. De teoremene som her vil bli anført kan hovedsakelig utledes på basis av de de semantiske aksiomene i de nevnte teoriene.

I det følgende vil teoremene bli formulert uten bevis. Grunnen til at vi gjør dette er at bevisene i det vesentlige er temmelig enkle og at de har et rutinemessig preg. Skulle man ha tatt dem med ville fremstillingen ha blitt svært lang og dessuten noe trettende.

§1 Oversikt over teoremer i T:A, T:C, T:A* og T:C*.

I det følgende bruker vi den følgende definisjon:

Definisjon 1.0

(a) True(F,L,v,w) <–> (iu)(GMen(u,F,L,v))(w)= 1
(b) True(F,L,w) <–> (Av)(Vt(v, (L);1) –> True(F,L,v,w))
(c) Val;L(F) <–> (Aw)(wêI –> True(F,L,w))

Vi starter med å formulere den følgende sats:

Teorem 1.1 (T;A, T;C) Anta LêUtvid(L;0) v FORM(L). Anta videre at CForm(G, (L);1) & F,H êFm((L);1). Anta xêVar((L);1) og at k,k;1,k;2êN. Anta at Vt(v,(L);1) & wêI & ¬ Fr(x;k,F,(L);1). Da gjelder:

(a) True(G,L,v,w) <–> True(G,L,w)
(b) (Aa)(Ab)(a,bêD –> (True(F,L, v(x;k/a),w) <–> True(F,L,v(x;k,b),w)))
(c) True(H;L,v,w) <–> True(H;(x;(k;1))[x;(k;2)], L, v(x;(k;2)/v(x;(k;1))),w)

Det bør bemerkes at dette teoremet er et korollar til de følgende to teoremer som holder, ikke bare i T;A og T;C, men også i T;A* og T;C*:

Teorem 1.2 (T;A, T;C,T:A*, T;C*) Anta SEMI;u(L) og at uêVFu((L);1). Anta dessuten at xêVar((L);1), k,k;1,k;2êN og at Vt(v,(L);1). Da gjelder:

(a) ¬ Fr(x;k,u,(L);1) –>
(Aa)(Ab)(a,bêD –> Me(u,L,v(x;k/a)) = Me(u,L,v(x;k/b)))
(b) Me(u,L,v) = Me(u;(x;(k;1)))[x;(k;2)],L, v(x;(k;2)/v(x;(k;1))))

Man kan også bevise en helt analog sats for formale språk:

Teorem 1.3 (T;A, T;C,T:A*, T;C*) Anta SEMI;u(L) og at uêVFu((L);1). Anta dessuten at xêVar((L);1), k,k;1,k;2êN og at Vt(v,(L);1). Da gjelder:

(a) ¬ Fr(x;k,u,(L);1) –>
(Aa)(Ab)(a,bêD –>

$$\prod(v(x;k/a),(L);1,(L);2)(u) = \prod(v(x;k/b),(L);1,(L);2)(u))$$

(b) $\prod(v,(L);1,(L);2)(u) =$
$$\prod(v(x;(k;2)/v(x;(k;1))),(L);1,(L);2)(u;(x;(k;1)))[x;(k;2)])$$

På samme måte som Teorem 1.1 er et korollar til Teorem 1.2 og Teorem 1.3 er også den følgende setning et korollar til disse to teoremene:

Teorem 1.4 (T;A, T;C) Anta LêUtvid(L;0) v FORM(L). Anta videre at CForm(G, (L);1) & F,H êFm((L);1). Anta xêVar((L);1) og at k,k;1,k;2êN. Anta at Vt(v,(L);1) & wêW & ¬ Fr(x;k,F,(L);1). Da gjelder:

(a) True(G,L,v,w) <–> True(G,L,w)
(b) (Aa)(Ab)(a,bêD –> (True(F,L, v(x;k/a),w) <–> True(F,L,v(x;k,b),w)))
(c) True(H;L,v,w) <–> True(H;(x;(k;1))[x;(k;2)], L, v(x;(k;2)/v(x;(k;1))),w)

Man legger merke til at Teorem 1.4 fremkommer fra Teorem 1.1 ved å erstatte "wêI" med "wêW". Merk også at Teorem 1.4 naturligvis bare kan utledes i T;A* og T;C*.

Man har videre:

Teorem 1.5 (T;A, T;C, T;A*, T;C*) Anta LêUtvid(L;0). Anta videre at F,G êFm((L);1). Anta x=Var((L);1) og at k,k;1,k;2êN. Anta at VTO(v,L) & wêI. Da gjelder:

(i) True((Ax;k)F,L,v,w) <–> (Aa)(aêD –> True(F,L,v(x;k/a),w))
(ii) True((Ex;k)F,L,v,w) <–> (Ea)(aêD & True(F,L,v(x;k/a),w))
(iii) True((A.x;k)F,L,v,w) <–> (Aa)(aêD;w –> True(F,L,v(x;k/a),w))
(iv) True((E.x;k)F,L,v,w) <–> (Ea)(aêD;w & True(F,L,v(x;k/a),w))
(v) True(Ex;k,L,v,w) <–> v(x;k)êD;w
(vi) True(x;(k;1)=x;(k;2),L,w,v) <–> v(x;(k;1)) = v(x;(k;2))
(vii) True(Nec(F),L,v,w) <–> (Ay)(yêI –> True(F,L,v,y))
(viii) True(Pos(F),L,v,w) <–> (Ey)(yêI & True(F,L,v,y))
(ix) True(F&G,L,v,w) <–> True(F,L,v,w) & True(G,L,v,w)
(x) True(F–>G,L,v,w) <–> (True(F,L,v,w) –> True(G,L,v,w))
(xi) True(FvG,L,v,w) <–> (True(F,L,v,w) v True(G,L,v,w))
(xii) True(F<–>G,L,v,w) <–> (True(F,L,v,w) <–> True(G,L,v,w))
(xiii) True(¬F,L,v,w) <–> ¬True(F,L,v,w)

Dette teoremet viser at de vanlige valuasjonsreglene holder for kvantorene og de setningslogiske konnektivene i semiformale språk som er utvidelser av L;0.

Av rent notasjonelle grunner innfører vi den følgende definisjon:

Definisjon 1.5.1 REF(x,y,w,z) = (iu)Ref(u,x,y,w,z)

Som man ser kan "REF(x,y,w,z)" leses " referansen til uttrykket x i språket y relativt til den logisk mulige verden w og verditilordningen z".

Vårt neste teorem kan formuleres slik:

Teorem 1.6 (T;A, T;C, T;A*, T;C*) Anta LêUtvid(L;0). Anta videre at F êFm((L);1). Anta x=Var((L);1) og at kêN. Anta at VTO(v,L) & wêI. Da gjelder:

(i) REF((ix;k)F,L,w,v)êD –>
REF((ix;k)F,L,w,v) = (ia)(aêD & True(F,L,v(x;k/a),w))

Som man ser er dette et teorem i alle teoriene T;A, T;C, T;A* og T;C*. Dette gjelder imidlertid ikke den følgende sats som bare holder i T;A og T;C:

Teorem 1.7 (T;A, T;C) Anta LêUtvid(L;0) og at têTm((L);1). Anta VTO(v,L). Da gjelder:

Me(t,L,v) = ∂wêI(REF(t,L,w,v))

Det er mulig å formulere et analogt teorem for formler. Imidlertid trenger vi da det følgende hjelpebegrep:

Definisjon 1.7.1 Anta X Inkl Y da setter vi

c(X,Y) = Mg(<1,x>: xêXΩY) U Mg(<0,x>: xêY–X)

Studerer man definisjonen ser man at dersom X er inkludert i mengden Y så er c(X,Y) en funksjon der Dom(c(X,Y)) = Y og Rgn(c(X,Y)) = {0,1}. Videre ser man at man har at c(X,Y)(r)=1 om rêX og at c(X,Y)(r)=0 om rêY–X. Man kan kalle c(X,Y) for den karakteristiske funksjonen til mengden X med hensyn på området Y.

Teorem 1.8 (T;A, T;C) Anta LêUtvid(L;0) og at FêFm((L);1). Anta VTO(v,L). Da gjelder:

Me(F,L,v) = c(Mg(w: wêI & True(F,L,v,w)), I)

Analogt med Teorem 1.7 og Teorem 1.8 har man:

Teorem 1.9 (T;A*, T;C*) Anta LêUtvid(L;0) og at FêFm((L);1). Anta VTO(v,L). Da gjelder:

(a) Me(t,L,v) = ∂wêW(REF(t,L,w,v))
(b) Me(F,L,v) = c(Mg(w: wêW & True(F,L,w,v)), I)

Man legger også merke til at følgende sats holder:

Teorem 1.10 (T;A, T;C, T;A*, T;C*) Anta LêUtvid(L;0) og at t1,t;2êTm((L);1). Anta VTO(v,L) & wêI. Da gjelder:

True(t1 = t2,L,v,w) <–> REF(t1,L,w,v) = REF(t2,L,w,v)

Det følgende omfangsrike teorem er som man ser ved nærmere inspeksjon meget sentralt i våre teorier:

Teorem 1.11 (T;A, T;C, T;A*, T;C*) Anta LêUtvid(L;0) og at F,G,HêFm((L);1). Anta x =Var((L);1) & k,k;1,k;2êN. Da gjelder:

(i) ¬ Fr(x;k,u,(L);1) –> Val;L((Ax;k)(F–>G) –>(F –> (Ax;k)G))
(ii) Val;L(F) –> Val;L((Ax;k)F)
(iii) Val;L(F) & Val;L(F–>G) –> Val;L(G)
(iv) Val;L(F) –> Val;L(Nec(F))

Videre gjelder Val;L(S) om S er en hvilken som helst formel som er oppført på listen nedenfor:

(v) (A.x;k)F <–> (Ax;k)(Ex;k –> F)
(vi) (E.x;k)F <–> (Ex;k)(Ex;k & F)
(vii) F;(x;(k;1))[x;(k;2)] –> (Ex;(k;1))F
(viii) (Ax;(k;1))F –> F;(x;(k;1))[x;(k;2)]

(ix) x;(k;1) = x;(k;2) –> Nec(x;(k;1) = x;(k;2))
(x) x;(k;1) ≠ x;(k;2) –> Nec(x;(k;1) ≠ x;(k;2))
(xi) x;(k;1) = x;(k;2) –> (F;(x;k))[x;(k;1)] <–> F;(x;k))[x;(k;2)])
(xii) Nec(F) –> F
(xiii) Pos(F) –> Nec(Pos(F))
(xiv) Nec(F) –> Nec(Nec(F))
(xv) (Ax;k)Nec(F) <–> Nec((Ax;k)F)
(xvi) (Ex;k)Pos(F) <–> Pos((Ex;k)F)
(xvii) Nec(F) <–> ¬Pos(¬F)
(xviii) Pos(F) <–> ¬Nec(¬F)
(xix) (Ex;k)F <–> ¬(Ax;k)¬F
(xx) (Ax;k)F <–> ¬(Ex;k)¬F
(xxi) F –>(G–>F)
(xxii) (F–>(G–> H)) –>((F–>G) –> (F–>H))
(xxiii) (¬G –> ¬F) –> (F –> G)
(xxiv) (F <–>G) –> (F –>G)
(xxv) (F<–>G) –> (G–> F)
(xxvi) (F–>G) –>((G–>F) –>(F<–>G))
(xxvii) FvG <–> ((¬F) –> G)
(xxviii) F&G <–> ¬((¬F)v(¬G))

Teorem 1.11 er viktig fordi det viser at de vanlige lovene for kvantorene, de setningslogiske konnektivene og Nec-operatoren er logiske sannheter i ethvert semiformalt utvetydig språk som er en utvidelse av L;0.

Det følgende er et generelt substitusjonsteorem for termdannende og formeldannende konstruksjoner av type <m,n,k> i et semiformalt utvetydig språk som er en utvidelse av L;0.

Teorem 1.12 (T;A) Anta LêUtvid(L;0) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(ii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iii) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler: [5]

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')
(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Merk at dette teoremet ikke lar seg bevise i noen av de andre teoriene vi har arbeidet med i dette avsnittet.

Teorem 1.13 (T;A, T;C, T;A*, T;C*) Anta LêUtvid(L;0) og at t,t1,t2,t3êTm((L);1). Anta videre at FêFm((L);1) & x,yêRgn(Var((L);1)). Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende formler::

(i) t1 = t2 –> t2 = t1

[5] Istedet for å skrive for eksempel en konjunksjon av n formler F;1, ..., F;n slik (1) F;1& ...& F;n vil vi der det er hensiktsmessig benytte notasjonen "Konj/i,1,n/(F;i)". Dette uttrykket betegner da den samme formelen som (1).

(ii) t1= t2 & t2 = t3 –> t1 =t2
(iii) t1 = t1

Har man ¬Fr(y,F,(L;1) gjelder det at Val;L(S) om S er den følgende formel:

(iv) y =(ix)F <–> (Ax)(F <–> x=y)

Har man ¬Fr(x,t, (L);1) gjelder det at Val;L(S) om S er den følgende formel:

(v) ¬(Ex)(x=t) –> t= (ix)(x≠x)

Det er mulig å bevise teoremer som er analoge med Teorem 1.12 også T;C's vedkommende. Det kan imidlertid i så fall være nyttig å innføre noen hjelpebegreper først.

Definisjon 1.13.1 (T;C) Anta $êP;<m,n,k>((L);1). Anta videre at SEMI;u(L). Da sier vi at $ er ekstensjonal med hensyn på termene i L, i symboler "Ext($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der

*f*ê (2^I)^[((D;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]

som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom(Me($,L)) så har man at:

Me($,L)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>)‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1,...,Y;k)‘w

der X;j° = ∂a1,...,a;mêD((X;j(a1,...,am))‘w) for j=1,..,n

En tilsvarende definisjon kan formuleres for konstruksjoner i C;<m,n,k>((L);1):

Definisjon 1.13.2 (T;C) Anta $êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at SEMI;u(L). Da sier vi at $ er ekstensjonal med hensyn på termene i L, i symboler "Ext($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der

*f*ê ((D;*)^I)^[((D;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]

som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom(Me($,L)) så har man at:

Me($,L)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>)‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1,...,Y;k)‘w

der X;j° = ∂a1,...,a;mêD((X;j(a1,...,am))‘w) for j=1,..,n

Merk at disse to definisjonene utelukkende er ment som et supplement til T;C og ingen av de andre teoriene. Definisjonene ovenfor angår semiformale utvetydige språk. De følgende to definisjoner er helt tilsvarende definisjoner for formale språk:

Definisjon 1.13.3 (T;C) Anta $êP;<m,n,k>((L);1). Anta videre at FORM(L). Da sier vi at $ er ekstensjonal med hensyn på termene i L, i symboler "Ext($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der

*f*ê (2^I)^[((D;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]

som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom((L);2($)) så har man at:

((L);2($)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>))‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1,...,Y;k)‘w

der X;j° = ∂a1,...,a;mêD((X;j(a1,...,am))‘w) for j=1,..,n

En tilsvarende definisjon kan formuleres for konstruksjoner i C;<m,n,k>((L);1):

Definisjon 1.13.4 (T;C) Anta $êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at FORM(L). Da sier vi at $ er ekstensjonal med hensyn på termene i L, i symboler "Ext($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der

*f*ê ((D;*)^I)^[((D;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]

som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom((L);2($)) så har man at:

((L);2($)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>))‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1,...,Y;k)‘w

der X;j° = ∂a1,...,a;mêD((X;j(a1,...,am))‘w) for j=1,..,n

Det bør bemerkes at den funksjonen *f* som omtales i definiens i definisjonene er entydig bestemt.

Nåvel. I T;C kan man bevise den følgende sats som langt på vei er analog med Teorem 1.12:

Teorem 1.14 (T;C) Anta LêUtvid(L;0) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(ii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iii) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(Nec(ti = ti'))] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(Nec(ti = ti'))] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Dette er omtrent alt vi kan vise direkte i T;C i retning av Teorem 1.12 uten å forutsette noe om konstruksjonene i L. Innfører vi derimot predikatet "Konstruksjonen $ er ekstensjonal med hensyn på termene i L", slik som vi har definert det ovenfor, kan vi imidlertid bevise den følgende sats som ligger temmelig nært opp til Teorem 1.12:

Teorem 1.15 (T;C) Anta LêUtvid(L;0) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) Ext($1,L) & Ext($2,L)
(ii) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(iii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iv) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Fra Teorem 1.14 og Teorem 1.15 fremgår det at en av forskjellene mellom T;A og T;C er at i følge T;A er absolutt alle konstruksjonene automatisk ekstensjonale med hensyn på termene, mens derimot T;C ikke utelukker eksistensen av konstruksjoner som er ikke-ekstensjonale med hensyn på termene.

La oss nå studere hvordan det står til med forhold av denne art i forbindelse med T;A* og T;C*. Det viser seg da hensiktsmessig å definere predikatet "$ er en intensjonalt normal konstruksjon i L" for både semiformalt utvetydige og formale språk i forbindelse med T;A* og T;C*:

Definisjon 1.15.1 (T;A*) Anta $êP;<m,n,k>((L);1). Anta videre at SEMI;u(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der

*f*ê (2^I)^[((D;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]

som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom(Me($,L)) så har man at:
Me($,L)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>)‘w = *f*(X;1,...,X;n,Y;1°,...,Y;k°)‘w
der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k

Tilsvarende for konstruksjoner $êC;<m,n,k>((L);1):

Definisjon 1.15.2 (T;A*) Anta $êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at SEMI;u(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der
*f*ê (D;*^I)^[((D;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]
som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom(Me($,L)) så har man at:
Me($,L)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>)‘w = *f*(X;1,...,X;n,Y;1°,...,Y;k°)‘w
der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k

Et helt tilsvarede par av definisjoner gis i forbindelse med formale språk:

Definisjon 1.15.3 (T;A*) Anta $êP;<m,n,k>((L);1). Anta videre at FORM(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der
*f*ê (2^I)^[((D;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]
som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom((L);2($)) så har man at:
((L);2($)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>))‘w = *f*(X;1,...,X;n,Y;1°,...,Y;k°)‘w
der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k

Tilsvarende for konstruksjoner $êC;<m,n,k>((L);1):

Definisjon 1.15.4 (T;A*) Anta $êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at FORM(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der
*f*ê (D;*^I)^[((D;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]
som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom((L);2($)) så har man at:
((L);2($)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>))‘w = *f*(X;1,...,X;n,Y;1°,...,Y;k°)‘w
der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k

Analogt med disse definisjonene som passer i forbindelse med T;A* kan man så formulere definisjoner som passer i forbindelse med T;C*

Definisjon 1.15.5 (T;C*) Anta $êP;<m,n,k>((L);1). Anta videre at SEMI;u(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der
*f*ê (2^I)^[((D;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]
som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom(Me($,L)) så har man at:
Me($,L)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>)‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1°,...,Y;k°)‘w
der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k
og der X;i° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(X;i(a1,...,am),I))‘w) for i=1,..,n

Tilsvarende for konstruksjoner $êC;<m,n,k>((L);1):

Definisjon 1.15.6 (T;C*) Anta $êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at SEMI;u(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der

*f*ê (D;*^I)^[((D;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]

som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom(Me($,L)) så har man at:

Me($,L)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>)‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1°,...,Y;k°)‘w

der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k

og der X;i° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(X;i(a1,...,am),I))‘w) for i=1,..,n

Et helt tilsvarede par av definisjoner gis i forbindelse med formale språk:

Definisjon 1.15.7 (T;C*) Anta $êP;<m,n,k>((L);1). Anta videre at FORM(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der

*f*ê (2^I)^[((D;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]

som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom((L);2($)) så har man at:

((L);2($)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>))‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1°,...,Y;k°)‘w

der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k

og der X;i° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(X;i(a1,...,am),I))‘w) for i=1,..,n

Tilsvarende for konstruksjoner $êC;<m,n,k>((L);1):

Definisjon 1.15.8 (T;C*) Anta $êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at FORM(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der

*f*ê (D;*^I)^[((D;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]

som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom((L);2($)) så har man at:

((L);2($)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>))‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1°,...,Y;k°)‘w

der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k

og der X;i° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(X;i(a1,...,am),I))‘w) for i=1,..,n

Som tidligere nevnt i sammenheng med de tilsvarende definisjonene i forbindelse med T;C er den *f*'en som nevnes i de diverse definiensene faktisk entydig bestemt.

I T;A* og T;C* er det ikke mulig å substituere logisk ekvivalente uttrykk innenfor området til vilkårlige konstruksjoner slik at sannhetsverdien beholdes. Dette er bare mulig i forbindelse med intensjonalt normale konstruksjoner. I det vesentlige er dette innholdet i de følgende teoremer:

Teorem 1.16 (T;A*) Anta LêUtvid(L;0) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) Norm($1,L) & Norm($2,L)

(ii) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)

(iii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)

(iv) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &

Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Videre har man i forbindelse med T;C*:

Teorem 1.17 (T;C*) Anta LêUtvid(L;0) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) Norm($1,L) & Norm($2,L)
(ii) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(iii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iv) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(Nec(ti = ti'))] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

§2 Teoremer i T:A, T:C, T:A* og T:C* i forbindelse med formale språk.

Ovenfor har vi nevnt en lang rekke teoremer i forbindelse med semiformale utvetydige språk. Vi vil nå formulere en del analoge satser for formale intensjonale språk. For å kunne formulere disse teoremene på en kompakt, men samtidig leselig måte, finner vi det hensiktsmessig å innføre en del hjelpebegreper.

Definisjon 2.1 (T;A, T;C, T;A*, T;C*) (a) Anta L er en intensjonal språkstruktur. Med et regulært konnektivsystem over L forstår vi da en sekvens s som oppfyller de følgende krav:

(i) s(0), s(1), s(2), s(3) êP;<1,0,1>(L)
(ii) s(4), s(5), s(6), s(7) êP;<0,0,2>(L)
(iii) s(8), s(9), s(10) êP;<0,0,1>(L)
(iv) s(11) ê P;<0,1,0>(L)
(v) s(12)êP;<0,2,0>(L)
(vi) s(13)êC;<1,0,1>(L)

(b) Er L en intensjonal språkstruktur og s et regulært konnektivsystem over L setter vi:

(i) A = s(0) E = s(1) A. = s(2) E. = s(3)
(ii) & = s(4) v = s(5) –> = s(6) <–> = s(7)
(iii) ¬ = s(8) Nec = s(9) Pos = s(10)
(iv) Eks = s(11)
(v) = = s(12)
(vi) i = s(13)

Vi trenger også den følgende definisjon som er ment å skulle brukes i forbindelse med T;A:

Definisjon 2.2 (T;A) Vi sier at s er et normalt konnektivsystem i forbindelse med det formale språket L, i symboler "Nk(s,L)" hvis og bare hvis FORM(L) og s oppfyller de følgende krav:

(i) s er et regulært konnektivsystem over (L);1
(ii) Man har at s oppfyller de følgende betingelser:

(1.1) (Aw)(AX)(wêI & Xê((2^I)^D) –>.
((L);2(A))(X)‘w <–> (Aa)(aêD –> X(a)‘w=1))
(1.2) (Aw)(AX)(wêI & Xê((2^I)^D) –>.
((L);2(E))(X)‘w <–> (Ea)(aêD & X(a)‘w=1))
(1.3) (Aw)(AX)(wêI & Xê((2^I)^D) –>.
((L);2(A.))(X)‘w <–> (Aa)(aêD;w –> X(a)‘w=1))
(1.4) (Aw)(AX)(wêI & Xê((2^I)^D) –>.
((L);2(E.))(X)‘w <–> (Ea)(aêD;w & X(a)‘w=1))
(2.1) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I) –>.
((L);2(&))(X,Y)‘w <–> (X(w) = Y(w) =1))
(2.1) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I) –>.
((L);2(v))(X,Y)‘w <–> (X(w) =1 v Y(w) =1))
(2.1) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I) –>.
((L);2(–>))(X,Y)‘w <–> (X(w) =1 –> Y(w) =1))
(2.1) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I) –>.
((L);2(<–>))(X,Y)‘w <–> (X(w) =1 <–> Y(w) =1))
(3.1) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I) –>.
((L);2(¬))(X)‘w <–> X(w) =0)
(3.2) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I) –>.
((L);2(Nec))(X)‘w <–>(Ay)(yêI –> X(y) =1))
(3.3) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I) –>.
((L);2(Pos))(X)‘w <–> (Ey)(yêI & X(y) =1))
(4.1) (Aw)(Ax)(wêI & xêD;* –>
((L);2(Eks)(x)‘w =1 <–> xêD;w)
(5.1) (Aw)(Ax)(Ay)(wêI & x,yêD;* –>
((L);2(=)(x,y)‘w =1 <–> x=y)
(6.1) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I)^D –>.
(E!x)(xêD & X(x)‘w =1) –> ((L);2(i)(x))‘w = (iz)(zêD & X(z)‘w=1))
(6.2) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I)^D –>.
¬(E!x)(xêD & X(x)‘w =1) –> ((L);2(i)(x))‘w = *)

Som man ser er denne definisjonen litt komplisert i det den pålegger intepretasjonsfunksjonen (L);2 i et formalt språk L visse krav for hvert ledd i s som sikrer at konnektivene i s får sin normale intepretasjon. Man kan sammenligne klausulene (1.1) – (6.2) i definisjonen ovenfor med de semantiske aksiomene Sm21 – Sm26 i T;A. Det er naturligvis en åpenbar analogi tilstede. Dette gir seg også utslag i at vi i T;A kan bevise teoremer om formale språk som er helt analoge med dem vi hittil har nevnt i forbindelse med semiformale språk.

Definisjon 2.1 tenker vi oss brukt i forbindelse med alle de åtte teoriene vi så langt har beskrevet detaljert. Derimot kan Definisjon 2.2, slik som antydet, bare brukes i forbindelse med T;A.

Man får imidlertid en definisjon av "Nk(s,L)" som passer i forbindelse med T;C om man forandrer Definisjon 2.2 ved å endre klausulene 4.1 og 5.1 til:

(4.1) (Aw)(Ax)(wêI & xê(D;*)^I –>
((L);2(Eks)(x)‘w =1 <–> x(w)êD;w)
(5.1) (Aw)(Ax)(Ay)(wêI & x,yê(D;*)^I –>
((L);2(=)(x,y)‘w =1 <–> x(w) = y(w))

og ellers lar alt være som det er. Vi kaller den definisjonen vi får på denne måten for Definisjon 2.2 T;C.

Man får fra Definisjon2.2 en definisjon av "Nk(s,L)" som passer sammen med T;A* om man overalt i Definisjon 2.2 erstatter uttrykket "I" med "W" unntatt når "I" forekommer i sammenhenger av typen "wêI". Da erstatter man ikke "I" med "W". Den definisjonen som fremkommer på denne måten vil vi kalle for Definisjon 2.2 T;A*.

Endelig får man en definisjon av "Nk(s,L)" som passer sammen med T;C* om man forandrer Definisjon2.2 T;C ved overalt å erstatte "I" med "W" untatt når "I" forkommer i sammenhenger av typen "wêI" i denne definisjonen.

Dermed har vi gitt eksplisitte definisjoner av "Nk(s,L)" som passer til de fire teoriene som vi har arbeidet med i forrige paragraf.

La oss nå fortsette med oversikten over teoremer som lar seg bevise i disse teoriene. Det følgende teorem er helt analogt med Teorem 1.5 i forrige paragraf:

Teorem 2.1 (T;A, T;C, T;A*, T;C*) Anta FORM(L) og at Nk(s,L). Anta videre at F,G êFm((L);1). Anta xêVar((L);1) og at k,k;1,k;2êN. Anta at Vt(v,(L);1) & wêI. Da gjelder:

(i) True((Ax;k)F,L,v,w) <–> (Aa)(aêD –> True(F,L,v(x;k/a),w))
(ii) True((Ex;k)F,L,v,w) <–> (Ea)(aêD & True(F,L,v(x;k/a),w))
(iii) True((A.x;k)F,L,v,w) <–> (Aa)(aêD;w –> True(F,L,v(x;k/a),w))
(iv) True((E.x;k)F,L,v,w) <–> (Ea)(aêD;w & True(F,L,v(x;k/a),w))
(v) True(Ex;k,L,v,w) <–> v(x;k)êD;w
(vi) True(x;(k;1)=x;(k;2),L,w,v) <–> v(x;(k;1)) = v(x;(k;2))
(vii) True(Nec(F),L,v,w) <–> (Ay)(yêI –> True(F,L,v,y))
(viii) True(Pos(F),L,v,w) <–> (Ey)(yêI & True(F,L,v,y))
(ix) True(F&G,L,v,w) <–> True(F,L,v,w) & True(G,L,v,w)
(x) True(F–>G,L,v,w) <–> (True(F,L,v,w) –> True(G,L,v,w))
(xi) True(FvG,L,v,w) <–> (True(F,L,v,w) v True(G,L,v,w))
(xii) True(F<–>G,L,v,w) <–> (True(F,L,v,w) <–> True(G,L,v,w))
(xiii) True(¬F,L,v,w) <–> ¬True(F,L,v,w)

Det er også mulig å bevise den følgende sats som er analog med Teorem 1.6 i §1:

Teorem 2.2 (T;A, T;C, T;A*, T;C*) Anta FORM(L) og at Nk(s,L). Anta videre at F êFm((L);1). Anta x =Var((L);1) og at k,k;1,k;2êN. Anta at Vt(v,(L);1) & wêI. Da gjelder:

(i) REF((ix;k)F,L,w,v)êD –>
REF((ix;k)F,L,w,v) = (ia)(aêD & True(F,L,v(x;k/a),w))

Videre har vi:

Teorem 2.3 (T;A, T;C) Anta FORM(L) og at Nk(s,L). Anta t,t;1,t;2êTm((L);1) og at FêFm((L);1). Anta Vt(v,(L);1) og at wêI. Da gjelder:

(i) Me(t,L,v) = ∂wêI(REF(t,L,w,v))
(ii) Me(F,L,v) = c(Mg(w: wêI & True(F,L,v,w)), I)
(iii) True(t;1=t;2,L,v,w) <–> REF(t;1,L,w,v) = REF(t;2,L,w,v)

Analogt med dette har man i forbindelse med T;A* og T;C*:

Teorem 2.4 (T;A*, T;C*) Anta FORM(L) og at Nk(s,L). Anta t,t;1,t;2êTm((L);1) og at FêFm((L);1). Anta Vt(v,(L);1) og at wêI. Da gjelder:

(i) Me(t,L,v) = ∂wêW(REF(t,L,w,v))
(ii) Me(F,L,v) = c(Mg(w: wêW & True(F,L,v,w)), W)

(iii) True(t;1=t;2,L,v,w) <–> REF(t;1,L,w,v) = REF(t;2,L,w,v)

Det følgende teorem er helt analogt med Teorem 1.11 i §1:

Teorem 2.5 (T;A, T;C, T;A*, T;C*) Anta FORM(L) & Nk(s,L) og at F,G,HêFm((L);1). Anta x =Var((L);1) & k,k;1,k;2êN. Da gjelder:

(i) ¬ Fr(x;k,u,(L);1) –> Val;L((Ax;k)(F–>G) –>(F –> (Ax;k)G))
(ii) Val;L(F) –> Val;L((Ax;k)F)
(iii) Val;L(F) & Val;L(F–>G) –> Val;L(G)
(iv) Val;L(F) –> Val;L(Nec(F))

Videre gjelder Val;L(S) om S er en hvilken som helst formel som er oppført på listen nedenfor:

(v) (A.x;k)F <–> (Ax;k)(Ex;k –> F)
(vi) (E.x;k)F <–> (Ex;k)(Ex;k & F)
(vii) F;(x;(k;1))[x;(k;2)] –> (Ex;(k;1))F
(viii) (Ax;(k;1))F –> F;(x;(k;1))[x;(k;2)]
(ix) x;(k;1) = x;(k;2) –> Nec(x;(k;1) = x;(k;2))
(x) x;(k;1) ≠ x;(k;2) –> Nec(x;(k;1) ≠ x;(k;2))
(xi) x;(k;1) = x;(k;2) –> (F;(x;k))[x;(k;1)] <–> F;(x;k))[x;(k;2)])
(xii) Nec(F) –> F
(xiii) Pos(F) –> Nec(Pos(F))
(xiv) Nec(F) –> Nec(Nec(F))
(xv) (Ax;k)Nec(F) <–> Nec((Ax;k)F)
(xvi) (Ex;k)Pos(F) <–> Pos((Ex;k)F)
(xvii) Nec(F) <–> ¬Pos(¬F)
(xviii) Pos(F) <–> ¬Nec(¬F)
(xix) (Ex;k)F <–> ¬(Ax;k)¬F
(xx) (Ax;k)F <–> ¬(Ex;k)¬F
(xxi) F –>(G–>F)
(xxii) (F–>(G–> H)) –>((F–>G) –> (F–>H))
(xxiii) (¬G –> ¬F) –> (F –> G)
(xxiv) (F <–>G) –> (F –>G)
(xxv) (F<–>G) –> (G–> F)
(xxvi) (F–>G) –>((G–>F) –>(F<–>G))
(xxvii) FvG <–> ((¬F) –> G)
(xxviii) F&G <–> ¬((¬F)v(¬G))

Vi vender oss nå mot substitusjonsteoremer i T;A av den typen som vi tidligere nevnte i forbindelse med semiformale språk. Det følgende teorem er helt analogt med Teorem 1.12 i §1:

Teorem 2.6 (T;A) Anta FORM(L) & Nk(s,L) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(ii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iii) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

I forbindelse med dette teoremet nevner vi også den følgende sats som svarer til Teorem 1.13 i §1:

Teorem 2.7 (T;A, T;C, T;A*, T;C*) Anta FORM(L) &Nk(s,L) og at t,t1,t2,t3êTm((L);1). Anta videre at FêFm((L);1) & x,yêRgn(Var((L);1)). Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende formler::

(i) t1 = t2 –> t2 = t1
(ii) t1= t2 & t2 = t3 –> t1 =t2
(iii) t1 = t1

Har man ¬Fr(y,F,(L;1) gjelder det at Val;L(S) om S er den følgende formel:

(iv) y =(ix)F <–> (Ax)(F <–> x=y)

Har man ¬Fr(x,t, (L);1) gjelder det at Val;L(S) om S er den følgende formel:

(v) ¬(Ex)(x=t) –> t= (ix)(x≠x)

De følgende teoremer er også helt analoge med satser som vi tidligere har bemerket riktigheten av. Den følgende sats svarer til Teorem 1.14 i §1:

Teorem 2.8 (T;C) Anta FORM(L) & Nk(s,L) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(ii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iii) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(Nec(ti = ti'))] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')
(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(Nec(ti = ti'))] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Den følgende sats svarer til Teorem 1.15 i §1:

Teorem 2.9 (T;C) Anta FORM(L) & Nk(s,L) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) Ext($1,L) & Ext($2,L)
(ii) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(iii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iv) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')
(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

La oss nå gå videre og betrakte tilsvarende resultater som kan bevises i T;A* og T;C*. Det følgende teorem svarer til Teorem 1.16 i §1:

Teorem 2.10 (T;A*) Anta FORM(L) & Nk(s,L) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) Norm($1,L) & Norm($2,L)
(ii) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(iii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iv) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Denne satsen svarer til Teorem 1.17 i §1

Teorem 2.11 (T;C*) Anta FORM(L) & Nk(s,L) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) Norm($1,L) & Norm($2,L)
(ii) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(iii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iv) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(Nec(ti = ti'))] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Dette avslutter vår oversikt over teoremer i teorifamilien T;A, T;C, T;A* og T;C*.

§3 Oversikt over teoremer i forbindelse med teoriene T:B,T:D, T:B* og T:D*

I de to forrige paragrafene ga vi en oversikt over en rekke viktige teoremer som kan bevises i en eller flere av teoriene T;A, T;C, T;A* og T;C*, eller "A-familien" av teorier som man også kunne kalle denne mengden.

Imidlertid holder en rekke av disse setningene også i en eller flere av teoriene i familien T;B, T;D, T;B* og T;D*, mens noen av dem må modifiseres og andre definisjoner legges til grunn for at de skal være utledbare. I dette avsnittet og det følgende vil vi i detalj påpeke hvilke av de teoremene som ble nevnt i de to forrige paragrafene som holder i henholdsvis T;B – T;D* og hvilke av dem som må forandres. Vi skal nå gå igjennom hele teoremrekken på ny og peke på hvilke satser som holder:

I det følgende bruker vi den følgende definisjon i forbindelse med teoriene T;B – T;D*. Den er forøvrig identisk med Definisjon 1.0 i §1:

Definisjon 3.0

(a) True(F,L,v,w) <–> (iu)(GMen(u,F,L,v))(w)= 1
(b) True(F,L,w) <–> (Av)(Vt(v, (L);1) –> True(F,L,v,w))
(c) Val;L(F) <–> (Aw)(wêI –> True(F,L,w))

Vi starter med å formulere den følgende sats som igjen svarer til Teorem 1.1:

Teorem 3.1 (T;B, T;D) Anta LêUtvid(L;0) v FORM(L). Anta videre at CForm(G, (L);1) & F,H êFm((L);1). Anta xêVar((L);1) og at k,k;1,k;2êN. Anta at Vt(v,(L);1) & wêI & ¬ Fr(x;k,F,(L);1). Da gjelder:

(a) True(G,L,v,w) <–> True(G,L,w)
(b) (Aa)(Ab)(a,bêD –> (True(F,L, v(x;k/a),w) <–> True(F,L,v(x;k,b),w)))
(c) True(H;L,v,w) <–> True(H;(x;(k;1))[x;(k;2)], L, v(x;(k;2)/v(x;(k;1))),w)

Det bør bemerkes at dette teoremet er et korollar til de følgende to teoremer som holder, ikke bare i T;B og T;D, men også i T;B* og T;D*:

Teorem 3.2 (T;B, T;D,T:B*, T;D*) Anta SEMI;u(L) og at uêVFu((L);1). Anta dessuten at xêVar((L);1), k,k;1,k;2êN og at Vt(v,(L);1). Da gjelder:

(a) ¬ Fr(x;k,u,(L);1) –>
(Aa)(Ab)(a,bêD –> Me(u,L,v(x;k/a)) = Me(u,L,v(x;k/b)))
(b) Me(u,L,v) = Me(u;(x;(k;1)))[x;(k;2)],L, v(x;(k;2)/v(x;(k;1))))

Man kan også bevise en helt analog sats for formale språk:

Teorem 3.3 (T;B, T;D,T:B*, T;D*) Anta SEMI;u(L) og at uêVFu((L);1). Anta dessuten at xêVar((L);1), k,k;1,k;2êN og at Vt(v,(L);1). Da gjelder:

(a) ¬ Fr(x;k,u,(L);1) –>
(Aa)(Ab)(a,bêD –>
∏(v(x;k/a),(L);1,(L);2)(u) = ∏(v(x;k/b),(L);1,(L);2)(u))
(b) ∏(v,(L);1,(L);2)(u) =
∏(v(x;(k;2)/v(x;(k;1))),(L);1,(L);2)(u;(x;(k;1)))[x;(k;2)])

På samme måte som Teorem 3.1 er et korollar til Teorem 3.2 og Teorem 3.3 er også den følgende setning et korollar til disse to teoremene:

Teorem 3.4 (T;B*, T;D*) Anta LêUtvid(L;0) v FORM(L). Anta videre at CForm(G, (L);1) & F,H êFm((L);1). Anta xêVar((L);1) og at k,k;1,k;2êN. Anta at Vt(v,(L);1) & wêW & ¬ Fr(x;k,F,(L);1). Da gjelder:

(a) True(G,L,v,w) <–> True(G,L,w)
(b) (Aa)(Ab)(a,bêD –> (True(F,L, v(x;k/a),w) <–> True(F,L,v(x;k,b),w)))
(c) True(H;L,v,w) <–> True(H;(x;(k;1))[x;(k;2)], L, v(x;(k;2)/v(x;(k;1))),w)

Man legger merke til at Teorem 3.4 fremkommer fra Teorem 3.1 ved å erstatte "wêI" med "wêW". Merk også at Teorem 1.4 naturligvis bare kan utledes i T;B* og T;D*.

Man har videre:

Teorem 3.5 (T;B, T;D, T;B*, T;D*) Anta LêUtvid(L;0). Anta videre at F,G êFm((L);1). Anta x=Var((L);1) og at k,k;1,k;2êN. Anta at VTO(v,L) & wêI. Da gjelder:

(i) True((Ax;k)F,L,v,w) <–> (Aa)(aêD –> True(F,L,v(x;k/a),w))
(ii) True((Ex;k)F,L,v,w) <–> (Ea)(aêD & True(F,L,v(x;k/a),w))
(iii) True((A.x;k)F,L,v,w) <–> (Aa)(aêD;w –> True(F,L,v(x;k/a),w))
(iv) True((E.x;k)F,L,v,w) <–> (Ea)(aêD;w & True(F,L,v(x;k/a),w))
(v) True(Ex;k,L,v,w) <–> v(x;k)êDD;w
(vi) True(x;(k;1)=x;(k;2),L,w,v) <–> v(x;(k;1))‘w = v(x;(k;2))‘w
(vii) True(Nec(F),L,v,w) <–> (Ay)(yêI –> True(F,L,v,y))
(viii) True(Pos(F),L,v,w) <–> (Ey)(yêI & True(F,L,v,y))
(ix) True(F&G,L,v,w) <–> True(F,L,v,w) & True(G,L,v,w)
(x) True(F–>G,L,v,w) <–> (True(F,L,v,w) –> True(G,L,v,w))
(xi) True(FvG,L,v,w) <–> (True(F,L,v,w) v True(G,L,v,w))
(xii) True(F<–>G,L,v,w) <–> (True(F,L,v,w) <–> True(G,L,v,w))
(xiii) True(¬F,L,v,w) <–> ¬True(F,L,v,w)

Dette teoremet viser at de vanlige valuasjonsreglene holder for kvantorene og de setningslogiske konnektivene i semiformale språk som er utvidelser av L;0.

Av rent notasjonelle grunner innfører vi den følgende definisjon som er helt lik den som ble gitt i §1. Den kan også benyttes her:

Definisjon 3.5.1 REF(x,y,w,z) = (iu)Ref(u,x,y,w,z)

Som man ser kan "REF(x,y,w,z)" leses " referansen til uttrykket x i språket y relativt til den logisk mulige verden w og verditilordningen z".

Vårt neste teorem kan formuleres slik:

Teorem 3.6 (T;B, T;D, T;B*, T;D*) Anta LêUtvid(L;0). Anta videre at F êFm((L);1). Anta x=Var((L);1) og at kêN. Anta at VTO(v,L) & wêI. Da gjelder:

(i) REF((ix;k)F,L,w,v)êDD –>
REF((ix;k)F,L,w,v) = (ia)(aêDD &(Ay)(yêD –>. True(F,L,v(x;k/y),w)<–> y(w)=a)

Som man ser er dette et teorem i alle teoriene T;B, T;D, T;B* og T;D*. Dette gjelder imidlertid ikke den følgende sats som bare holder i T;B og T;D:

Teorem 3.7 (T;B, T;D) Anta LêUtvid(L;0) og at têTm((L);1). Anta VTO(v,L). Da gjelder:

Me(t,L,v) = ∂wêI(REF(t,L,w,v))

Det er mulig å formulere et analogt teorem for formler. Imidlertid trenger vi da det følgende hjelpebegrep som er helt identisk med det som ble innført i §1:

Definisjon 3.7.1 Anta X Inkl Y da setter vi

c(X,Y) = Mg(<1,x>: xêX) U Mg(<0,x>: xêY–X)

Studerer man definisjonen ser man at dersom X er inkludert i mengden Y så er c(X,Y) en funksjon der Dom(c(X,Y)) = Y og Rgn(c(X,Y)) = {0,1}. Videre ser man at man har at

c(X,Y)(r)=1 om rêX og at c(X,Y)(r)=0 om rêY–X. Man kan kalle c(X,Y) for den karakteristiske funksjonen til mengden X med hensyn på området Y.

Teorem 3.8 (T;B, T;D) Anta LêUtvid(L;0) og at FêFm((L);1). Anta VTO(v,L). Da gjelder:

Me(F,L,v) = c(Mg(w: wêI & True(F,L,v,w)), I)

Analogt med Teorem 1.7 og Teorem 1.8 har man:

Teorem 3.9 (T;B*, T;D*) Anta LêUtvid(L;0) og at FêFm((L);1). Anta VTO(v,L). Da gjelder:

(a) Me(t,L,v) = ∂wêW(REF(t,L,w,v))
(b) Me(F,L,v) = c(Mg(w: wêW & True(F,L,w,v)), I)

Man legger også merke til at følgende sats holder:

Teorem 3.10 (T;B, T;D, T;B*, T;D*) Anta LêUtvid(L;0) og at t1,t;2êTm((L);1). Anta VTO(v,L) & wêI. Da gjelder:

True(t1 = t2,L,v,w) <–> REF(t1,L,w,v) = REF(t2,L,w,v)

Det følgende omfangsrike teorem er som man ser ved nærmere inspeksjon meget sentralt i våre teorier:

Teorem 3.11 (T;B, T;D, T;B*, T;D*) Anta LêUtvid(L;0) og at F,G,HêFm((L);1). Anta x =Var((L);1) & k,k;1,k;2êN. Da gjelder:

(i) ¬ Fr(x;k,u,(L);1) –> Val;L((Ax;k)(F–>G) –>(F –> (Ax;k)G))
(ii) Val;L(F) –> Val;L((Ax;k)F)
(iii) Val;L(F) & Val;L(F–>G) –> Val;L(G)
(iv) Val;L(F) –> Val;L(Nec(F))

Videre gjelder Val;L(S) om S er en hvilken som helst formel som er oppført på listen nedenfor:

(v) (A.x;k)F <–> (Ax;k)(Ex;k –> F)
(vi) (E.x;k)F <–> (Ex;k)(Ex;k & F)
(vii) F;(x;(k;1))[x;(k;2)] –> (Ex;(k;1))F
(viii) (Ax;(k;1))F –> F;(x;(k;1))[x;(k;2)]
(ix) Nec(F) –> F
(x) Pos(F) –> Nec(Pos(F))
(xi) Nec(F) –> Nec(Nec(F))
(xii) (Ax;k)Nec(F) <–> Nec((Ax;k)F)
(xiii) (Ex;k)Pos(F) <–> Pos((Ex;k)F)
(xiv) Nec(F) <–> ¬Pos(¬F)
(xv) Pos(F) <–> ¬Nec(¬F)
(xvi) (Ex;k)F <–> ¬(Ax;k)¬F
(xvii) (Ax;k)F <–> ¬(Ex;k)¬F
(xviii) F –>(G–>F)
(xix) (F–>(G–> H)) –>((F–>G) –> (F–>H))
(xx) (¬G –> ¬F) –> (F –> G)
(xxi) (F <–>G) –> (F –>G)
(xxii) (F<–>G) –> (G–> F)
(xxiii) (F–>G) –>((G–>F) –>(F<–>G))

(xxiv) FvG <–> ((¬F) –> G)
(xxv) F&G <–> ¬((¬F)v(¬G))

Teorem 3.11 er viktig fordi det viser at de vanlige lovene for kvantorene, de setningslogiske konnektivene og Nec-operatoren er logiske sannheter i ethvert semiformalt utvetydig språk som er en utvidelse av L;0. Man bør imidlertid merke seg at Terem 3.11 adskiller seg fra Teorem 1.11 derved at vi ikke lenger kan bevise Leibniz lov : x;(k;1) = x;(k;2) –> (F;(x;k))[x;(k;1)] <–> F;(x;k))[x;(k;2)]) i T;B – T;D*. Det samme gjelder de to lovene:

x;(k;1) = x;(k;2) –> Nec(x;(k;1) = x;(k;2)) og
x;(k;1) ≠ x;(k;2) –> Nec(x;(k;1) ≠ x;(k;2))

Det følgende er et generelt substitusjonsteorem for termdannende og formeldannende konstruksjoner av type <m,n,k> i et semiformalt utvetydig språk som er en utvidelse av L;0.

Teorem 3.12 (T;B) Anta LêUtvid(L;0) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(ii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iii) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler: [6]

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Merk at dette teoremet ikke lar seg bevise i noen av de andre teoriene vi har arbeidet med i dette avsnittet.

Teorem 3.13 (T;B, T;D, T;B*, T;D*) Anta LêUtvid(L;0) og at t,t1,t2,t3êTm((L);1). Anta videre at FêFm((L);1) & x,yêRgn(Var((L);1)). Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende formler::

(i) t1 = t2 –> t2 = t1
(ii) t1= t2 & t2 = t3 –> t1 =t2
(iii) t1 = t1

Har man ¬Fr(y,F,(L;1) gjelder det at Val;L(S) om S er den følgende formel:

(iv) y =(ix)F <–> (Ax)(F <–> x=y)

Har man ¬Fr(x,t, (L);1) gjelder det at Val;L(S) om S er den følgende formel:

(v) ¬(Ex)(x=t) –> t= (ix)(x≠x)

Det er mulig å bevise teoremer som er analoge med Teorem 3.12 også T;D's vedkommende. Det kan imidlertid i så fall være nyttig å innføre noen hjelpebegreper først.

Definisjon 3.13.1 (T;D) Anta $êP;<m,n,k>((L);1). Anta videre at SEMI;u(L). Da sier vi at $ er ekstensjonal med hensyn på termene i L, i symboler "Ext($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der

[6] Istedet for å skrive for eksempel en konjunksjon av n formler F;1, ..., F;n slik (1) F;1& ...& F;n vil vi der det er hensiktsmessig benytte notasjonen "Konj/i,1,n/(F;i)". Dette uttrykket betegner da den samme formelen som (1).

*f*ê (2^I)^[((DD;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]
som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom(Me($,L)) så har man at:
Me($,L)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>)‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1,...,Y;k)‘w
der X;j° = ∂a1,...,a;mêD((X;j(a1,...,am))‘w) for j=1,..,n

En tilsvarende definisjon kan formuleres for konstruksjoner i C;<m,n,k>((L);1):

Definisjon 3.13.2 (T;D) Anta $êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at SEMI;u(L). Da sier vi at $ er ekstensjonal med hensyn på termene i L, i symboler "Ext($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der
*f*ê ((DD;*)^I)^[((DD;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]
som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom(Me($,L)) så har man at:
Me($,L)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>)‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1,...,Y;k)‘w
der X;j° = ∂a1,...,a;mêD((X;j(a1,...,am))‘w) for j=1,..,n

Merk at disse to definisjonene utelukkende er ment som et supplement til T;C og ingen av de andre teoriene. Definisjonene ovenfor angår semiformale utvetydige språk. De følgende to definisjoner er helt tilsvarende definisjoner for formale språk:

Definisjon 3.13.3 (T;D) Anta $êP;<m,n,k>((L);1). Anta videre at FORM(L). Da sier vi at $ er ekstensjonal med hensyn på termene i L, i symboler "Ext($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der
*f*ê (2^I)^[((DD;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]
som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom((L);2($)) så har man at:
((L);2($)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>))‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1,...,Y;k)‘w
der X;j° = ∂a1,...,a;mêD((X;j(a1,...,am))‘w) for j=1,..,n

En tilsvarende definisjon kan formuleres for konstruksjoner i C;<m,n,k>((L);1):

Definisjon 3.13.4 (T;D) Anta $êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at FORM(L). Da sier vi at $ er ekstensjonal med hensyn på termene i L, i symboler "Ext($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der
*f*ê ((DD;*)^I)^[((DD;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]
som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom((L);2($)) så har man at:
((L);2($)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>))‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1,...,Y;k)‘w
der X;j° = ∂a1,...,a;mêD((X;j(a1,...,am))‘w) for j=1,..,n

Det bør bemerkes at den funksjonen *f* som omtales i definiens i definisjonene er entydig bestemt.

Nåvel. I T;D kan man bevise den følgende sats som langt på vei er analog med Teorem 3.12:

Teorem 3.14 (T;D) Anta LêUtvid(L;0) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at
(i) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(ii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iii) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))
Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:
(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(Nec(ti = ti'))] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>

$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(Nec(ti = ti'))] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Dette er omtrent alt vi kan vise direkte i T;D i retning av Teorem 3.12 uten å forutsette noe om konstruksjonene i L. Innfører vi derimot predikatet "Konstruksjonen $ er ekstensjonal med hensyn på termene i L", slik som vi har definert det ovenfor, kan vi imidlertid bevise den følgende sats som ligger temmelig nært opp til Teorem 1.12:

Teorem 3.15 (T;D) Anta LêUtvid(L;0) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) Ext($1,L) & Ext($2,L)
(ii) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(iii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iv) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Fra Teorem 3.14 og Teorem 3.15 fremgår det at en av forskjellene mellom T;B og T;D er at i følge T;B er absolutt alle konstruksjonene automatisk ekstensjonale med hensyn på termene, mens derimot T;D ikke utelukker eksistensen av konstruksjoner som er ikke-ekstensjonale med hensyn på termene.

La oss nå studere hvordan det står til med forhold av denne art i forbindelse med T;B* og T;D*. Det viser seg da hensiktsmessig å definere predikatet "$ er en intensjonalt normal konstruksjon i L" for både semiformalt utvetydige og formale språk i forbindelse med T;B* og T;D*:

Definisjon 3.15.1 (T;B*) Anta $êP;<m,n,k>((L);1). Anta videre at SEMI;u(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der

*f*ê (2^I)^[((DD;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]

som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom(Me($,L)) så har man at:

Me($,L)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>)‘w = *f*(X;1,...,X;n,Y;1°,...,Y;k°)‘w

der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k

Tilsvarende for konstruksjoner $êC;<m,n,k>((L);1):

Definisjon 3.15.2 (T;B*) Anta $êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at SEMI;u(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der

*f*ê (DD;*^I)^[((DD;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]

som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom(Me($,L)) så har man at:

Me($,L)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>)‘w = *f*(X;1,...,X;n,Y;1°,...,Y;k°)‘w

der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k

Et helt tilsvarede par av definisjoner gis i forbindelse med formale språk:

Definisjon 3.15.3 (T;B*) Anta $êP;<m,n,k>((L);1). Anta videre at FORM(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der
*f*ê (2^I)^[((DD;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]
som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom((L);2($)) så har man at:
((L);2($)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>))‘w = *f*(X;1,...,X;n,Y;1°,...,Y;k°)‘w
der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k

Tilsvarende for konstruksjoner $êC;<m,n,k>((L);1):

Definisjon 3.15.4 (T;B*) Anta $êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at FORM(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der
*f*ê (DD;*^I)^[((DD;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]
som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom((L);2($)) så har man at:
((L);2($)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>))‘w = *f*(X;1,...,X;n,Y;1°,...,Y;k°)‘w
der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k

Analogt med disse definisjonene som passer i forbindelse med T;B* kan man så formulere definisjoner som passer i forbindelse med T;D*

Definisjon 3.15.5 (T;D*) Anta $êP;<m,n,k>((L);1). Anta videre at SEMI;u(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der
*f*ê (2^I)^[((DD;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]
som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom(Me($,L)) så har man at:
Me($,L)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>)‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1°,...,Y;k°)‘w
der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k
og der X;i° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(X;i(a1,...,am),I))‘w) for i=1,..,n

Tilsvarende for konstruksjoner $êC;<m,n,k>((L);1):

Definisjon 3.15.6 (T;D*) Anta $êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at SEMI;u(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der
*f*ê (DD;*^I)^[((DD;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]
som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom(Me($,L)) så har man at:
Me($,L)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>)‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1°,...,Y;k°)‘w
der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k
og der X;i° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(X;i(a1,...,am),I))‘w) for i=1,..,n

Et helt tilsvarede par av definisjoner gis i forbindelse med formale språk:

Definisjon 3.15.7 (T;D*) Anta $êP;<m,n,k>((L);1). Anta videre at FORM(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der
*f*ê (2^I)^[((DD;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]

som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom((L);2($)) så har man at:
((L);2($)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>))‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1°,...,Y;k°)‘w
der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k
og der X;i° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(X;i(a1,...,am),I))‘w) for i=1,..,n

Tilsvarende for konstruksjoner $êC;<m,n,k>((L);1):

Definisjon 3.15.8 (T;D*) Anta $êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at FORM(L). Da sier vi at $ er en intensjonalt normal konstruksjon i L, i symboler "Norm($,L)" hvis og bare hvis det finnes en funksjon *f* der
*f*ê (DD;*^I)^[((DD;*)^(D^m))^n X ((2^I)^(D^m))^k]
som oppfyller krav: Er wêI og <X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>êDom((L);2($)) så har man at:
((L);2($)(<X;1,....,X;n, Y;1,...,Y;k>))‘w = *f*(X;1°,...,X;n°,Y;1°,...,Y;k°)‘w
der Y;j° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(Y;j(a1,...,am),I))‘w) for j=1,..,k
og der X;i° = ∂a1,...,a;mêD((Rest(X;i(a1,...,am),I))‘w) for i=1,..,n

Som tidligere nevnt i sammenheng med de tilsvarende definisjonene i forbindelse med T;D er den *f*'en som nevnes i de diverse definiensene faktisk entydig bestemt.

I T;B* og T;D* er det ikke mulig å substituere logisk ekvivalente uttrykk innenfor området til vilkårlige konstruksjoner slik at sannhetsverdien beholdes. Dette er bare mulig i forbindelse med intensjonalt normale konstruksjoner. I det vesentlige er dette innholdet i de følgende teoremer:

Teorem 3.16 (T;B*) Anta LêUtvid(L;0) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at
(i) Norm($1,L) & Norm($2,L)
(ii) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(iii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iv) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))
Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:
(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')
(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Videre har man i forbindelse med T;C*:

Teorem 3.17 (T;D*) Anta LêUtvid(L;0) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at
(i) Norm($1,L) & Norm($2,L)
(ii) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(iii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iv) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))
Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:
(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(Nec(ti = ti'))] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

§4 Teoremer i T:B, T:D, T:B* og T:D* i forbindelse med formale språk.

Ovenfor har vi nevnt en lang rekke teoremer i forbindelse med semiformale utvetydige språk. Vi vil nå formulere en del analoge satser for formale intensjonale språk. For å kunne formulere disse teoremene på en kompakt, men samtidig leselig måte, finner vi det hensiktsmessig å innføre en del hjelpebegreper.

Definisjon 4.1 (T;B, T;D, T;B*, T;D*) (a) Anta L er en intensjonal språkstruktur. Med et regulært konnektivsystem over L forstår vi da en sekvens s som oppfyller de følgende krav:

(i) s(0), s(1), s(2), s(3) êP;<1,0,1>(L)
(ii) s(4), s(5), s(6), s(7) êP;<0,0,2>(L)
(iii) s(8), s(9), s(10) êP;<0,0,1>(L)
(iv) s(11) ê P;<0,1,0>(L)
(v) s(12)êP;<0,2,0>(L)
(vi) s(13)êC;<1,0,1>(L)

(b) Er L en intensjonal språkstruktur og s et regulært konnektivsystem over L setter vi:

(i) A = s(0) E = s(1) A. = s(2) E. = s(3)
(ii) & = s(4) v = s(5) –> = s(6) <–> = s(7)
(iii) ¬ = s(8) Nec = s(9) Pos = s(10)
(iv) Eks = s(11)
(v) = = s(12)
(vi) i = s(13)

Vi trenger også den følgende definisjon som er ment å skulle brukes i forbindelse med T;B:

Definisjon 4.2 (T;B) Vi sier at s er et normalt konnektivsystem i forbindelse med det formale språket L, i symboler "Nk(s,L)" hvis og bare hvis FORM(L) og s oppfyller de følgende krav:

(i) s er et regulært konnektivsystem over (L);1
(ii) Man har at s oppfyller de følgende betingelser:

(1.1) (Aw)(AX)(wêI & Xê((2^I)^D) –>.
((L);2(A))(X)‘w <–> (Aa)(aêD –> X(a)‘w=1))
(1.2) (Aw)(AX)(wêI & Xê((2^I)^D) –>.
((L);2(E))(X)‘w <–> (Ea)(aêD & X(a)‘w=1))
(1.3) (Aw)(AX)(wêI & Xê((2^I)^D) –>.
((L);2(A.))(X)‘w <–> (Aa)(aêD;w –> X(a)‘w=1))
(1.4) (Aw)(AX)(wêI & Xê((2^I)^D) –>.
((L);2(E.))(X)‘w <–> (Ea)(aêD;w & X(a)‘w=1))
(2.1) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I) –>.
((L);2(&))(X,Y)‘w <–> (X(w) = Y(w) =1))
(2.1) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I) –>.
((L);2(v))(X,Y)‘w <–> (X(w) =1 v Y(w) =1))
(2.1) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I) –>.
((L);2(–>))(X,Y)‘w <–> (X(w) =1 –> Y(w) =1))
(2.1) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I) –>.

((L);2(<–>))(X,Y)‘w <–> (X(w) =1 <–> Y(w) =1))

(3.1) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I) –>.
((L);2(¬))(X)‘w <–> X(w) =0)

(3.2) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I) –>.
((L);2(Nec))(X)‘w <–>(Ay)(yêI –> X(y) =1))

(3.3) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I) –>.
((L);2(Pos))(X)‘w <–> (Ey)(yêI & X(y) =1))

(4.1) (Aw)(Ax)(wêI & xêDD;* –>
((L);2(Eks)(x)‘w =1 <–> xêDD;w)

(5.1) (Aw)(Ax)(Ay)(wêI & x,yêDD;* –>
((L);2(=)(x,y)‘w =1 <–> x=y)

(6.1) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I)^D –>.
(E!a)(aêDD & (Ay)(yêD –>(X(y)‘w =1 <–>y(w)=a))) –>
((L);2(i)(x))‘w = (ia)(aêDD & (Ay)(yêD –>(X(y)‘w =1 <–>y(w)=a)))

(6.2) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I)^D –>.
¬(E!a)(aêDD & (Ay)(yêD –>(X(y)‘w =1 <–>y(w)=a))) –>
((L);2(i)(x))‘w = *)

Som man ser er denne definisjonen litt komplisert i det den pålegger intepretasjonsfunksjonen (L);2 i et formalt språk L visse krav for hvert ledd i s som sikrer at konnektivene i s får sin normale intepretasjon. Man kan sammenligne klausulene (1.1) – (6.2) i definisjonen ovenfor med de semantiske aksiomene i T;B. Det er naturligvis en åpenbar analogi tilstede. Dette gir seg også utslag i at vi i T;B kan bevise teoremer om formale språk som er helt analoge med dem vi hittil har nevnt i forbindelse med semiformale språk.

Definisjon 4.1 tenker vi oss brukt i forbindelse med alle de åtte teoriene vi så langt har behandlet i de siste paragrafene. Derimot kan Definisjon 4.2, slik som antydet, bare brukes i forbindelse med T;B.

Man får imidlertid en definisjon av "Nk(s,L)" som passer i forbindelse med T;D om man forandrer Definisjon 4.2 ved å endre klausulene 4.1 og 5.1 til:

(4.1) (Aw)(Ax)(wêI & xê(DD;*^I) –>
((L);2(Eks)(x)‘w =1 <–> x(w)êDD;w)

(5.1) (Aw)(Ax)(Ay)(wêI & x,yê(DD;*^I) –>
((L);2(=)(x,y)‘w =1 <–> x(w)=y(w))

og ellers lar alt være som det er. Vi kaller den definisjonen vi får på denne måten for Definisjon 4.2 T;D.

Man får fra Definisjon4.2 en definisjon av "Nk(s,L)" som passer sammen med T;B* om man overalt i Definisjon 4.2 erstatter uttrykket "I" med "W" unntatt når "I" forekommer i sammenhenger av typen "wêI". Da erstatter man ikke "I" med "W". Den definisjonen som fremkommer på denne måten vil vi kalle for Definisjon 4.2 T;B*.

Endelig får man en definisjon av "Nk(s,L)" som passer sammen med T;D* om man forandrer Definisjon4.2 T;D ved overalt å erstatte "I" med "W" untatt når "I" forkommer i sammenhenger av typen "wêI" i denne definisjonen.

Dermed har vi gitt eksplisitte definisjoner av "Nk(s,L)" som passer til de fire teoriene som vi har arbeidet med her: T;B, T;D, T;B* og T;D*.

La oss nå fortsette med oversikten over teoremer som lar seg bevise i disse teoriene. Det følgende teorem er helt analogt med Teorem 3.5 i forrige paragraf:

Teorem 4.1 (T;B, T;D, T;B*, T;D*) Anta FORM(L) og at Nk(s,L). Anta videre at F,G êFm((L);1). Anta xêVar((L);1) og at k,k;1,k;2êN. Anta at Vt(v,(L);1) & wêI. Da gjelder:

(i) True((Ax;k)F,L,v,w) <–> (Aa)(aêD –> True(F,L,v(x;k/a),w))
(ii) True((Ex;k)F,L,v,w) <–> (Ea)(aêD & True(F,L,v(x;k/a),w))
(iii) True((A.x;k)F,L,v,w) <–> (Aa)(aêD;w –> True(F,L,v(x;k/a),w))
(iv) True((E.x;k)F,L,v,w) <–> (Ea)(aêD;w & True(F,L,v(x;k/a),w))
(v) True(Ex;k,L,v,w) <–> v(x;k)‘w êDD;w
(vi) True(x;(k;1)=x;(k;2),L,w,v) <–> v(x;(k;1))(w) = v(x;(k;2))(w)
(vii) True(Nec(F),L,v,w) <–> (Ay)(yêI –> True(F,L,v,y))
(viii) True(Pos(F),L,v,w) <–> (Ey)(yêI & True(F,L,v,y))
(ix) True(F&G,L,v,w) <–> True(F,L,v,w) & True(G,L,v,w)
(x) True(F–>G,L,v,w) <–> (True(F,L,v,w) –> True(G,L,v,w))
(xi) True(FvG,L,v,w) <–> (True(F,L,v,w) v True(G,L,v,w))
(xii) True(F<–>G,L,v,w) <–> (True(F,L,v,w) <–> True(G,L,v,w))
(xiii) True(¬F,L,v,w) <–> ¬True(F,L,v,w)

Det er også mulig å bevise den følgende sats som er analog med Teorem 1.6 i §1:

Teorem 4.2 (T;B, T;D, T;B*, T;D*) Anta FORM(L) og at Nk(s,L). Anta videre at F êFm((L);1). Anta x =Var((L);1) og at k,k;1,k;2êN. Anta at Vt(v,(L);1) & wêI. Da gjelder:

(i) REF((ix;k)F,L,w,v)êDD –>
REF((ix;k)F,L,w,v) =
(ia)(aêDD & (Ay)(yêD –>.True(F,L,v(x;k/y),w)) <–> y(w)=a))

Videre har vi:

Teorem 4.3 (T;B, T;D) Anta FORM(L) og at Nk(s,L). Anta t,t;1,t;2êTm((L);1) og at FêFm((L);1). Anta Vt(v,(L);1) og at wêI. Da gjelder:

(i) Me(t,L,v) = ∂wêI(REF(t,L,w,v))
(ii) Me(F,L,v) = c(Mg(w: wêI & True(F,L,v,w)), I)
(iii) True(t;1=t;2,L,v,w) <–> REF(t;1,L,w,v) = REF(t;2,L,w,v)

Analogt med dette har man i forbindelse med T;A* og T;C*:

Teorem 4.4 (T;B*, T;D*) Anta FORM(L) og at Nk(s,L). Anta t,t;1,t;2êTm((L);1) og at FêFm((L);1). Anta Vt(v,(L);1) og at wêI. Da gjelder:

(i) Me(t,L,v) = ∂wêW(REF(t,L,w,v))
(ii) Me(F,L,v) = c(Mg(w: wêW & True(F,L,v,w)), W)
(iii) True(t;1=t;2,L,v,w) <–> REF(t;1,L,w,v) = REF(t;2,L,w,v)

Det følgende teorem er helt analogt med Teorem 1.11 i §1:

Teorem 4.5 (T;B, T;D, T;B*, T;D*) Anta FORM(L) & Nk(s,L) og at F,G,HêFm((L);1). Anta x =Var((L);1) & k,k;1,k;2êN. Da gjelder:

(i) ¬ Fr(x;k,u,(L);1) –> Val;L((Ax;k)(F–>G) –>(F –> (Ax;k)G))
(ii) Val;L(F) –> Val;L((Ax;k)F)
(iii) Val;L(F) & Val;L(F–>G) –> Val;L(G)
(iv) Val;L(F) –> Val;L(Nec(F))

Videre gjelder Val;L(S) om S er en hvilken som helst formel som er oppført på listen nedenfor:

(v)	(A.x;k)F <–> (Ax;k)(Ex;k –> F)
(vi)	(E.x;k)F <–> (Ex;k)(Ex;k & F)
(vii)	F;(x;(k;1))[x;(k;2)] –> (Ex;(k;1))F
(viii)	(Ax;(k;1))F –> F;(x;(k;1))[x;(k;2)]
(ix)	Nec(F) –> F
(x)	Pos(F) –> Nec(Pos(F))
(xi)	Nec(F) –> Nec(Nec(F))
(xii)	(Ax;k)Nec(F) <–> Nec((Ax;k)F)
(xiii)	(Ex;k)Pos(F) <–> Pos((Ex;k)F)
(xiv)	Nec(F) <–> ¬Pos(¬F)
(xv)	Pos(F) <–> ¬Nec(¬F)
(xvi)	(Ex;k)F <–> ¬(Ax;k)¬F
(xvii)	(Ax;k)F <–> ¬(Ex;k)¬F
(xviii)	F –>(G–>F)
(xix)	(F–>(G–> H)) –>((F–>G) –> (F–>H))
(xx)	(¬G –> ¬F) –> (F –> G)
(xxi)	(F <–>G) –> (F –>G)
(xxii)	(F<–>G) –> (G–> F)
(xxiii)	(F–>G) –>((G–>F) –>(F<–>G))
(xxiv)	FvG <–> ((¬F) –> G)
(xxv)	F&G <–> ¬((¬F)v(¬G))

Vi vender oss nå mot substitusjonsteoremer i T;B av den typen som vi tidligere nevnte i forbindelse med semiformale språk. Det følgende teorem er helt analogt med Teorem 3.12 i §3:

Teorem 4.6 (T;B) Anta FORM(L) & Nk(s,L) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(ii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iii) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

I forbindelse med dette teoremet nevner vi også den følgende sats som svarer til Teorem 3.13 i §3:

Teorem 4.7 (T;B, T;D, T;B*, T;D*) Anta FORM(L) &Nk(s,L) og at t,t1,t2,t3êTm((L);1). Anta videre at FêFm((L);1) & x,yêRgn(Var((L);1)). Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende formler::

(i) t1 = t2 –> t2 = t1
(ii) t1= t2 & t2 = t3 –> t1 =t2
(iii) t1 = t1

Har man ¬Fr(y,F,(L;1) gjelder det at Val;L(S) om S er den følgende formel:

(iv) y =(ix)F <–> (Ax)(F <–> x=y)

Har man ¬Fr(x,t, (L);1) gjelder det at Val;L(S) om S er den følgende formel:

(v) ¬(Ex)(x=t) –> t= (ix)(x≠x)

De følgende teoremer er også helt analoge med satser som vi tidligere har bemerket riktigheten av. Den følgende sats svarer til Teorem 3.14 i §3:

Teorem 4.8 (T;D) Anta FORM(L) & Nk(s,L) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(ii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iii) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(Nec(ti = ti'))] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(Nec(ti = ti'))] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Den følgende sats svarer til Teorem 3.15 i §1:

Teorem 4.9 (T;D) Anta FORM(L) & Nk(s,L) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) Ext($1,L) & Ext($2,L)
(ii) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(iii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iv) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

La oss nå gå videre og betrakte tilsvarende resultater som kan bevises i T;B* og T;D*. Det følgende teorem svarer til Teorem 3.16 i §3:

Teorem 4.10 (T;B*) Anta FORM(L) & Nk(s,L) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at

(i) Norm($1,L) & Norm($2,L)
(ii) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(iii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iv) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))

Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Denne satsen svarer til Teorem 3.17 i §3

Teorem 4.11 (T;D*) Anta FORM(L) & Nk(s,L) og at $1êP;<m,n,k>((L);1). Anta $2êC;<m,n,k>((L);1). Anta videre at
(i) Norm($1,L) & Norm($2,L)
(ii) t1,...,t,n,t1',....,tn' êTm((L);1)
(iii) F1,...,Fk, F1',...., Fk' êFm((L);1)
(iv) x1,...,x;m êRgn(Var((L);1))
Da gjelder Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:
(1) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(Nec(ti = ti'))] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$1(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) <–> $1(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')
(2) Konj/i,1,n/[(Ax1)...(Axm)(ti = ti')] &
Konj/j,1,k/[(Ax1)...(Axm)Nec(Fj <–> Fj')] –>
$2(x1,...,xm,t1,..,tn,F1,...,Fk) = $2(x1,...,xm,t1',..,tn',F1',...,Fk')

Dette avslutter vår oversikt over teoremer i teorifamilien T;B, T;D, T;B* og T;D*.

§5 Sannhetsdefinisjoner for intensjonale språk.

Formålet med denne og de følgende paragrafer er å illustrere hvordan man kan gi sannhetsdefinisjoner for intensjonale språk både av formal og semiformal art. Spesielt er vi interessert i de problemer og vanskeligheter som dukker opp når man forsøker å gi en sannhetsdefinisjon for L;A. I det følgende vil vi forøvrig begrense oss til å studere L;A og T;A, men det skulle være klart at betraktniger avsamme art som dem vi presenterer her også kan gjøres i forbindelse med de andre teoriene som har blitt betraktet: T;B – T;D*.

§5.1 Et elementært eksempel.

La oss tenke oss at vi utvider L;A med et nytt ikke-logisk predikat: " x er en rød gjenstand i verdenen w". Det nye språket skal vi betegne med "L;A+". Vi utvider T;A til T;A+ ved bare å utvide språket til L;A+ samt legge til alle nye instanser av utsondrings- og replacement aksiomskjemaene i L;A+. Vi vil også legge til postulatet:

(+) R(x,w) –> (xêD & wêI)

der "R(x,w)" forkorter "x er en rød gjenstand i verdenen w". (+) tenkes da å være et ikke-logisk aksiom i vår utvidelse T;A+ av T;A. La oss nå definere konstruksjonen Re ved:

Re = ∂xêE;1(((x) er en rød gjenstand))

og dernest fiksere et konstruksjonssystem K ved:

K= Min;c(X: Reê(X);1(<0,1,0>) & Aê (X);1(<1,0,1>) &
–> ê (X);1(<0,0,2>) & ¬ê (X);1(<0,0,1>) & = ê(X);1(<0,2,0>))

Her er naturligvis A, –>, ¬ og = de vi definerte i Kapittel I.

Vi definerer:

L;r = <L[(K);1, (K);2, E;1,Var;0], s;0> der s;0 ={<0,A>,<1,–>>,<2,¬>, <3,=>}

På basis av denne definisjonen kan man så bevise:

Teorem 5.1.1 (T;A) IntS;f(L;r)

La oss også i det følgende tenke oss at L;A+ inneholder predikatet "x er identisk med y i verdenen w" som vi forkorter med "Id(x,y,w)" og at man i T;A+ også har tatt med aksiomet:

(++) Id(x,y,w) –> x,yêD & wêI

Definer: q= {<Re,∂xêD(c(Mg(w: R(x,w)),I))>, <=, ∂x,yêD(c(Mg(w: Id(x,y,w)),I))>}. Man kan da lett bevise i T;A+ :

Teorem 5.1.2 (T;A+) M(q)

mao. at q er en mengde. La oss så definere FL;r ved:

FL;r= (ix)(FORM;f(x) & q=Rest((x);2, UN/nêN/(P;<0,n,0>(L;r))) &
L;r =<(x);1,(x);3>)

Da kan vi også lett bevise:

Teorem 5.1.2 (T;A+) (Ey)(y = FL;r)

Det skulle ikke være spesielt vanskelig å se hvordan disse to satsene bevises i T;A+. Man bruker (+) og (++) ovenfor, samt de mengdeteoretiske aksiomene for å godtgjøre den første satsen. Den siste satsen følger så fra den første, definisjonen av FORM;f(x), samt en del andre velkjente mengdeteoretiske satser. La oss sette FL;r* = <(FL;r);1,(FL;r);2>. Da har man at FORM(FL;r*). Siden vi tidligere har definert True(F,L,v,w) og definisjonen av FL;r* via definisjonen av "FORM(x)" i Kapittel I kan omformes til en fullstendig eksplisitt definisjon i L;A+ følger det at vi nå har gitt en sannhetsdefinisjon for FL;r* i L;A+ og at vi også kan gjøre denne helt eksplisitt. Det skulle også fremgå fra dette eksemplet hvordan en slik definisjon kan gis for ethvert konkret førsteordens språk.

La oss tilslutt for illustrasjonens skyld nevne det følgende, nokså trivielle teorem, i T;A+:

Teorem 5.1.3 (T;A+) Anta Vt(v,(L;r);1) & x= Var((L;r);1). Anta videre at j,kêN og at wêI. Da gjelder:

(i) (Aa)(aêD –> (True(Re(x;k), FL;r*,v(x;k,a),w) <–> R(a,w)))

(ii) (Aa)(aêD –>
(True(Re(x;k) –> ¬Re(x;k), FL;r*,v(x;k,a),w) <–> R(a,w) –>¬R(a,w)))

(iii) (Aa)(aêD –>
(True((Ax;j)Re(x;j), FL;r*,v(x;k,a),w) <–> (Ab)(bêD –> R(b,w))))

§6 Sannhetsdefinisjon av L:A

Vi har ovenfor illustrert hvordan vi kan gi en sannhetsdefinisjon for et meget enkelt førsteordens språk. Nå er også L;A et førsteordens språk og det kan derfor være av interesse å se på (1) hvordan man kan gi en nøyaktig definisjon av dette språket innenfor den rammen vi hittil har arbeidet og (2) hvordan en konkret sannhetsdefinisjon for L;A vil se ut i et rikere metaspråk. Punkt (2) er også viktig av den grunn at dette metaspråket i seg selv er interessant. Man kan for eksempel være interessert i nøyaktig hvilke setninger i det som det er rimelig å anse som sanne. Naturlig nok støter man her på vanskelig spørsmål som det ikke er så lett å avgjøre på noen enkel måte, men det kan likevel neppe benektes at disse spørsmålene kan fortjene en viss ettertanke.

§6.1 Konstantene i L:A

I Appendix I har vi laget en detaljert og fullstendig liste over de konstruksjonene og primitive ikke-logiske predikatene som inngår i L;A. Som man ser fra dette appendix er det predikatene (1) – (35), samt (39) – (59). Vi har også oppført visse konstanter, nemlig (10), samt dem ved (36), (37) og (38). Siden vi nå ønsker å arbeide med et førsteordens språk som bare inneholder predikater erstatter vi konstanten (10) med predikatet: (10.1) "x er språket Norsk" som vi forkorter med "n;0(x)". Konstantene "a", ..., "å" erstatter vi med de følgende predikater: "x er den første lille latinske bokstaven i det norske alfabet",...., "x er den ni og tyvende lille latinske bokstaven i det norske alfabet". På tilsvarende måte går vi frem i forbindelse med konstantene nevnt ved (37). Vi innfører også her 29 predikater, nemlig : "x er den første store latinske bokstaven i det norske alfabet",..., "x er den ni og tyvende store latinske bokstaven i det norske alfabet". Disse 58 predikatene forkorter vi med henholdsvis: "a(x)", ..., "å(x)", "A(x)",... , "Å(x)". I tilknytning til konstantene ved (38) innfører vi de følgende syv predikater: (i) "x er det vanlige venstrehåndsparantestegnet i norsk", (ii) "x er det vanlige høyrehåndsparantestegnet i norsk", (iii) "x er det vanlige uttrops-tegnet som brukes i norsk skrift", (iv) "x er det vanlige apostrofftegnet som brukes i norsk skrift", (v) "x er det vanlige kommategnet i norsk", (vi) "x er det vanlige punktumtegnet i norsk", "x er det vanlige stjernetegnet som brukes i norsk skrift". Disse predikatene forkorter vi med henholdsvis "t;1(x)", ..., "t;7(x)". Man kan nå selvfølgelig innføre de tidligere konstantene ved definisjoner, ved å definere:

n;0 = (ix)n;0(x)
a = (ix)a(a), ..., å = (ix)å(x), A = (ix)A(x),....., Å = (ix)Å(x)
(= (ix)t;1(x), ..., * = (ix)t;7(x)

Man kan fremdeles beholde Definisjon 0.5 i Kapittel I. Imidlertid må man nå legge til konjunksjonen som sier at det finnes et og bare et objekt x som er slik at a(x), et og bare et objekt som er slik at b(x) osv. til H8. Man må altså med andre ord føye til den følgende konjunksjon i H8:

(E!x)n;0(x)& (E!x)a(x) & ..... &(E!x)å(x) & (E!x)A(x)& .... &
(E!x)Å(x) &(E!x)t;1(x) & .... & (E!x)t;7(x)

Den versjonen av H8 som man får på denne måten må man altså fra nå av regne som den offesielle versjonen av dette aksiomet.

§6.2 Den formelle definisjonen av L:A

I tilknytning til hvert av predikatene (1) – (6), (17) – (35) og (39) – (59) kan vi definere en tilsvarende E;1 -konstruksjon i L;A. Vi skal betegne disse med "X;1" – "X;6","X;17" – "X;35", "X;39" – "X:59". Imidlertid vil vi ikke detaljert gi disse definisjonene, men det skulle likevel ikke være vanskelig å se hvordan det kan gjøres. Eksempelvis vil X;39 være definert slik:

X;39 = ∂<x,y>êE;1^2(((x) er medlem av (y)))

De andre konstruksjonene vil være definert påtilsvarende måte. La oss nevne at vi setter N;0 = ∂xêE;1(((x) er språket norsk)) og at vi videre lar L;1,..., L;29, L*;1,...,L*;29 være de konstruksjonene som svarer til de syntaktiske predikatene vi innførte ovenfor, nemlig: "a(x)",....,"å(x)", "A(x)", ..., "Å(x)". Endelig lar vi T;1,..., T;7 være E;1-konstruksjonene som svarer til predikatene "t;1(x)",...,"t;7(x)". Vi setter nå:

J;0 = {X;1,....,X;6, X;17,...,X;35, X;39,....,X;59, N;0,L;1,...,L;29,
L*;1,....,L*;29, T;1,...,T;7}

Videre setter vi J;0(n) = J;0Ω (E;1^(E;1^n)) for alle n≥1. På dette punkt er det forsåvidt lett å gi en rigorøs definisjon av L;A i det vi setter:

C;A = Min;c[Z: (An)(nêN –> J;0(n) Inkl (Z);1(<0,n,0>)) & A ê(Z);1(<1,0,1>) &
–> ê (Z);1(<0,0,2>) & ¬ê(Z);1(<0,0,1>) & = ê(Z);1(<0,2,0>)]

Tilslutt setter vi:

L;A = <L[(C;A);1, (C;A);2, E;1, Var;0], s;0>

der s;0 er definert som i §5.1. Det er nå mulig å gi et bevis i T;A for det følgende teorem:

Teorem 6.2.1 (T;A) (i) KSys(C;A, <E;1,Var;0>)
(ii) IntS;f(L;A)

Det bør nevnes at det selvfølgelig er mulig å gjennomføre et helt detaljert bevis for denne satsen. Imidlertid vil dette bli svært langtekkelig om det skulle skrives ut i detalj. Av denne grunn sløyfer vi et slikt detaljert bevis. La oss også bemerke at det kan være rimelig å oppfatte (1) Repfrag(L;A, n;0) som en sann setning i L;A. Dette synes også å gjelde den påstand at <(L;A);1,n;0> er et semiformalt utvetydig språk, med andre ord: (2) SEMI;u(<(L;A);1,n;0>). Imidlertid skulle det være klart at ingen av disse to setningene er teoremer i T;A.

§6.3 Formell definisjon av T:A

Det kan nå være passende å gi en strengt formell definisjon av teorien T;A innenfor rammen av L;A. Før vi gjør dette synes det likevel å være på sin plass å fremsette noen forberedende bemerkninger. Vi har innført en serie av definisjoner i tilknytning til T;A. Denne definisjonsserien er egentlig et system av forkortningskonvensjoner. Eksempelvis forkorter formlen (1) i forrige paragraf en temmelig komplisert tegnsekvens i E;1 i lys av de definisjonene vi har gitt. Det samme gjelder formelen (2) som vi nevte der. Det bør også nevnes at vi har brukt "x","y", "z", ..., og også "a", "b", "c",.... som syntaktiske variabler for variabeltegn i L;A, dvs. elementene i Rgn(Var;0). La oss nå innføre den følgende

konvensjon. Er μ et eller annet uttrykk som inneholder notasjon som er innført ved definisjon så skal |μ| være den sekvensen i E;1 som μ forkorter og som ikke inneholder definert notasjon. Vi har da for eksempel at
(3) |xêy| = X;39(x,y) , videre at |Repfrag((L;A);1), n;0)|êE;1 osv. Vi skal ikke her gi noen formell definisjon av denne forkortningsoperatoren "| |", men bruke den på en uformell måte.

Definisjonen av T;A kan nå formuleres slik:

Definisjon 6.3.1 T;A = (ix)(Teori;f(x,L;A) & (x);1 –Mg(w: LAks(w,L;A)) =
{|H1|,...,|H12|} U { |A1|,...., |A10|} U { |On1|, ... , |On10|}U
{|Sm1|, ..., |Sm26|} U {|FSm1|, ... , |FSm14|}

§7 En metateori for T:A

Vi skal nå beskrive en metateori for T;A som er så sterk at vi kan bevise at alle teoremene i T;A er sanne i metateorien. Imidlertid skal vi først ta for oss en utvidelse av L;A. La oss for hvert predikat P i L;A danne et nytt predikat P' som er n+1-ært om P er n-ært ved å føye til utrykket "relativt til verdenen w" etter P. Siden f.eks. "x er medlem av y" er et predikat i L;A vil "x er medlem av y relativt til verdenen w" være et ternært predikat av den nevnte type. Videre vil vi ha, siden "x er et språk" er et primitivt predikat i L;A, at "x er et språk relativt til verdenen w" er et binært predikat av den typen vi ønsker å legge til L;A. Vi utvider nå L;A til L;Am ved å legge til alle disse nye predikatene. L;Am vil følgelig inneholde alle predikatene i L;A pluss et entydig bestemt n+1'ært predikat for hvert opprinnelig n-ært predikat (n≥1) i L;A. Vi vil forkorte disse nye predikatene ved å føye til en indeks på våre tidligere innførte forkortelser for predikatene i L;A. Noen eksempler vil gjøre dette klarere: (1) Språk;w(x) forkorter "x er et språk i verdenen w", (2) "KonTyp;w(x,y,z)" forkorter "x er en konstruksjon av type y i språket z relativt til verdenen w". I lys av disse eksemplene skulle det være klart hvordan våre forkortningskonvensjoner er. Det bør bemerkes at variabeltegnene, kvantorene og de setningslogiske konnektivene er de samme i L;A og L;Am. Derimot vil vi i L;Am ha et ternært predikat =;w som svarer til identitetspredikatet i L;A: "x=;w y" forkorter "x er identisk med y relativt til verdenen w". Vi har nå beskrevet vårt metaspråk L;Am for teorien T;A.

Imidlertid er det formålstjenlig å ha til rådighet et system av forkortelser i tillegg til det vi innførte i forbindelse med predikatene "a(x)",...,"å(x)" osv. Vi bruker "X;1´w",..., "X;9´w", "X;11´w",....,"X;35´w", "X;39´w",...., "X;59´w", "N;0´w", "L;1´w",....,"L;29´w", "L*;1´w",...., "L*;29´w", "T;1´w",...., T;7´w" for å forkorte de predikatene som har med tegn og bokstaver å gjøre. Feks. vi uttrykket "L;1´w" forkorte "x er den første lille latinske bokstaven i det norske alfabet relativt til verdenen w". Tilsvarende for de andre predikatene vi nevnte i §6.1.

Naturligvis kan man nå definere L;Am på en like rigorøs måte som L;A selv, men siden dette vil ta uforholdsmessig mye plass skal vi ikke gjøre det. Fremstillingen vil derfor være av en forholdsvis uformell natur i det følgende.

§7.1 Definisjon av metateorien T:Am

La P(n) være klassen av alle de n+1-ære predikatene i L;Am som svarer til de n-ære predikatene i L;A (n≥1). Språket til teorien T;Am er L;Am. Aksiomene i T;Am er de følgende: (a) De vanlige logiske aksiomene for førsteordens logikk med identitet i L;Am. (b) Alle de ikke-logiske aksiomene i T;A er ikke-logiske aksiomer i T;Am. I tillegg bør det

bemerkes at alle instanser av utsondrings-aksiomskjemaet og replacement-aksiomskjemaet i L;Am er aksiomer i T;Am.
(c) Er πêP(n) så er π(x1,...,xn,y) –> (x1,...,xnê D & yêI) et aksiom i T;Am. (d) For å angi den siste aksiomklassen i T;Am definerer vi induktivt en oversettelse, J;x, av L;A inn i L;Am for hvert variabeltegn xêRgn(Var;0). Definisjonen er som følger:

Definisjon 7.1.1 Er pêP;<0,n,0>(L;A) så er p;t det n+1-ære predikatet i L;Am som svarer til p. J;x for xêRgn(Var;0) kan nå defineres slik:

(i) Er xêRgn(Var;0) og z=Var;0 og pêP;<m,n,k>(L;A) så er
J;x(p(z;1,...,z;n)) = p;t(z;1,...,z;n,x)

(ii) Er F,GêFm(L;A) & xêRgn(Var;0) så har man:
(a) J;x(F–>G) = (J;x(F) –> J;x(G))
(b) J;x(¬F) = ¬ J;x(F)

(iii) Er FêFm(L;A), xêRgn(Var;0) & z= Var;0 setter man:
J;x((Az;k)F) = (Az;k)(z;kêD –> J;x(F))

Vi kan nå avgrense den siste aksiomklassen i T;Am ved å si at den inneholder nøyaktig alle formler av typen J;x(F) der F er et aksiom i T;A og x er det første variabeltegnet som ikke forekommer i F.

Dermed har vi gitt en fullstendig angivelse av aksiomene i teorien T;Am og dermed også en fullstendig definisjon av teorien T;Am siden denne er entydig bestemt når de ikke-logiske akiomene er angitt. Som man ser er definisjonen av T;Am av en litt uformell natur. Man kunne i prinsippet ha gitt en helt formell definisjon, men denne ville ha blitt svært komplisert når man tenker over hvor innfløkt T;A selv tross alt er.

§7.2 Teoremer i T:Am

Siden T;Am er en enkel utvidelse av T;A er alle teoremene man kan utlede i T;A også utledbare i T;Am. Det følger at alle de resultatene vi tidligere har anført i forbindelse med T;A også er teoremer i T;Am. La oss nå se på en del satser som er særegne for T;Am. Først kan det være hensiktsmessig å se på et enkelt eksempel. På grunnlag av de mengdeteoretiske aksiomene i T;Am samt aksiomene nevnt under (c) i §7.1 er det nokså klart at man for eksempel kan vise at:

(1) M(∂<x,y>êD^2(c(Mg(w: X;1´w(x,y)),I)))

naturligvis kan man for hvert PêP;<0,n,0>(L;A) bevise:

Teorem 7.2.1 (T;Am) M(∂<x1,...,xn>êD^n[c(Mg(w: P;t(x1,...,xn,w)),I)])

La p;m´1,...., p;m´(q;m) være de m-ære predikatene i L;A. (Er m>5 så er q;m =0. Man ser dette lett fra listen over L;A-predikater i Appendix I)

Setter man:

Definisjon 7.2.2 q(0) =
UN/i,1,5/{<p:i´1, ∂x1,...,x;nêD(c(Mg(w: (p;i´1);t(x1,...,xn,w)),I))>,....,
<p:i´(q;i), ∂x1,...,x;nêD(c(Mg(w: (p;i´(q;i));t(x1,...,xn,w)),I))>}

kan man vise:

Teorem 7.2.3 (T;Am) M(q(0))

Merk at Definisjon 7.2.2 er en uformell definisjon i metaspråket til L;Am og T;Am. Hvis vi i detalj skulle ha skrevet ut definisjonen av q(0) ville den ha blitt svært lang. Det ville ha dreiet seg om et komplisert uttrykk av typen:

q(0) = {<X;1, ∂x,yêD(c(Mg(w: X;1´w(x,y)),I))>,....,
<X;52, ∂x1,...,x5êD(c(Mg(w: X;52´w(x1,...,x5)),I))>,....,
<T;7, ∂xêD(c(Mg(w: T;7´w(x)),I))>}

Det er klart at dette uttrykket er slik at det blir for langt å skrive det ut i detalj. Imidlertid viser dette også klart hvordan det teoretisk sett kan gjøres.

Vi kan nå definere:

Definisjon 7.2.4 FL;A = (ix)(FORM;f(x) &
Rest((x);2, UN/nêN/(P;<0,n,0>(L;A))) = q(0) &
L;A = <(x);1, (x);3>

Merk at denne definisjonen er formell hvis man detaljert skrev ut definisjonen av q(0) som ble gitt ovenfor. Man kan nå vise:

Teorem 7.2.5 (T;Am) (Ex)(x= FL;A)

Vi utelater beviset siden det er helt rutinemessig. Som et korollar til Teorem 7.2.5 har man:

Teorem 7.2.6 (T;Am) FORM(<(FL;A);1, (FL;A);2>)

Vi bemerker at det ikke synes mulig å utlede:

(1) (Ax)(xêCFm((L;A);1) & xê(T;A);3 –>
(Aw)(wêI –> True(x, (FL;A);1,w))

i T;Am. Det man derimot kan vise er den følgende påstand:

Teorem 7.2.6 Er xêCFm((L;A);1) og xê(T;A);3 så er resultatet av å sette inn et standardnavn på x for "----" og J;w(x) for "—" i:

(2) "(Aw)(wêI –>. True(----, (FL;A);1, w) <–> —)"

et uttrykk som forkorter et teorem i T;Am

Dette vil vi likevel ikke gi noe formelt bevis for her, men jeg tror at leseren selv lett kan overbevise seg om riktigheten av denne påstanden ved å se på en rekke konkrete eksempler. Det skulle være mulig å formalisere dette metateoremet og beviset for det i T;A, men en detaljert redegjørelse for dette ville kreve en forklaring av en rekke delvis kjedelige, delvis temmelig kompliserte, tekniske detaljer som trolig vil sette noen hver på en tålmodighetsprøve.

Angående standardnavn vil f.eks. "A(x_', A(x_",X;39(x_', x_")))" være standardnavnet på nettopp uttrykket A(x_', A(x_",X;39(x_', x_"))) på samme måte som talltegnet "2" kan sies å være standardnavnet på tallet 2.

Fra Teorem 7.2.6 følger siden J;w(x) er et aksiom i T;Am om x er et ikke-logisk aksiom i T;A at:

Teorem 7.2.7 Er xêCFm((L;A);1) og xê(T;A);3 så er resultatet av å sette inn et standardnavn på x for "----" i:

(+) "(Aw)(wêI –>. True(----, (FL;A);1, w))"

et uttrykk som forkorter et teorem i T;Am

§8 Noen flere betraktninger over T:Am

Det er klart at T;Am ikke kan brukes til å rettferdiggjøre T;A siden den neppe er noe særlig mer innlysende enn T;A selv. Det virker snarere rimelig å si at den er noe mindre innlysende. Fra dette kan man imidlertid ikke uten videre slutte at T;Am er noen ufornuftig teori eller at den er feilaktig. Ingen har bevist at den er feilaktig eller motsigelsesfull.

La oss i denne forbindelse se på en litt sterkere teori enn T;Am. Denne kan defineres ved å si at den har de samme aksiomene som T;Am bortsett fra dem som ble nevntunder punkt (d) i §7.1. I stedet for disse aksiomene tenker man seg nå at at man rett og slett legger til:

ME1 (Ax)(xêCFm((L;A);1) & xê(T;A);1 –>(Aw)(wêI –> True(x, (FL;A);1,w))

Språket til denne teorien er L;Am. La oss kalle selve teorien for T;Am'. Det er lett å vise at man i T;Am' kan utlede alle formlene J;w(x) om xê(T;A);1. Dette er tilfelle fordi Teorem 7.2.6 fremdeles holder.

Det er naturligvis ingenting i veien for at man også kan legge til det følgende aksiom:

ME2 SEMI;u(<(L;A);1,n;0>) & (Ax)(xêConstr((L;A);1) –>
Me(x,<(L;A);1,n;0>) = Me(x,FL;A))

Tilsynelatende er dette et sant utsagn i L;Am og burde om så er tilfelle føyes til T;Am' om man ønsker å gjøre denne teorien mer fullstendig.

La oss i denne forbindelse også nevne det følgende forhold. La T;A+ være teorien T;A utvidet med den følgende formel som nytt ikke-logisk aksiom:

ME3 SEMI;u(<L;A,n;0>)

Språket til T;A+ er det samme som det til T;A, nemligL;A. Man kan nå legge til som et nytt aksiom til T;A+:

(1) (Ax)(xê(T;A);3 –> (Aw)(wêI –> True(x, <L;A,n;0>,w))

Vi vil da naturligvis få en sterkere teori. La oss kalle den T;A+(1). Det er nå ikke noe i veien for at vi an danne en sekvens av stadig sterkere teorier <T;A+(n)>/nêN/ der vi har at T;A+(n+1) har som ikke-logiske aksiomer alle dem som inngår i T;A+(n) pluss :

(2) (Ax)(xê(T;A+(n));3 –> (Aw)(wêI –> True(x, <L;A,n;0>,w))

I mine øyne er dette en helt naturlig og legitim utvidelsesprosedyre. T;A er og må være – noe som man vet i lys av Gødels ufullstendighetsteorem – en ufullstendig teori. Den må også være en teori der vi ikke innenfor rammen av teorien selv kan formalisere et konsistensbevis for teorien. Det følger at (1) ikke kan være noe teorem i T;A. Spørsmålet oppstår da om (1)

er sann eller usann. Hvis den er usann bør den naturligvis ikke legges til T;A+ som nytt ikke-logisk aksiom. Imidlertid synes det ikke å være noe om direkte peker i retning av at (1) er usann. Hvis T;A+ er en rimelig teori, noe man vel kan tenke seg å argumentere for at den er, synes det snarere som om det er meget som taler til fordel for at (1) er riktig. Men da kan det neppe være noe i veien for å utvide T;A+ med denne setningen som et nytt ikke-logisk aksiom om man ønsker seg en mer fullstendig aksiomatisering av "sannhetene" i L;A.

Et rent heuristisk resonnement av den samme karakter kan brukes til å "begrunne" fornuftigheten av alle teoriene i sekvensen <T;A+(n)>/nêN/.

Det er intet prinipielt til hinder for at man kan konstruere en metateori for T;A+(n) for hvert n≥1 på samme måte som vi har gjort for T;A. La oss kalle metateorien til T;A+(n) for T;Am'(n). Språket til T;Am'(n) er naturlig nok L;Am. De ikke-logiske aksiomene vil være (a) aksiomene i T;A+(n) samt alle nye instanser av replacement- og utsondringsaksiomskjemaene i L;Am (b) Alle aksiomene nevnt under punkt (c) i §7.1 (c) ME2 ovenfor, samt:

(3) (Ax)(xêFm((L;A);1) & xê(T;A+(n));3 –> (Aw)(wêI –> True(x,FL;A,w))

Naturligvis kan man så forsterke T;Am'(n) igjen ved å føye til et aksiom som sier at den selv er sann, og så fortsette denne prosedyren så langt man ønsker. Man kan med andre ord konstruere en sekvens av teorier <T;Am'(n)´q>/qêN/ på samme måte som vi dannet sekvensen <T;A+(n)>/nêN/.

Vi har nevnt teorihierarkiene ovenfor hovedsakelig for å vise en del utvidelsesmuligheter når det gjelder T;A. Videre har de blitt nevnt for å understreke og minne om at teorien T;A kan oppfattes som en teori som sier en god del om seg selv. Utvidelsene ovenfor er naturligvis av en helt rutinemessig karakter og kan foretas for enhver teori som inneholder T;A.

Det bør også nevnes at de ontologiske aksiomene i T;A er meget svake og bare delvis gir en svar på alle de spørsmålene som kan tenkes fremsatt i forbindelse med mulige verdener og mulige individer. I T;Am' kan man uttrykke mer om dette. For eksempel må man, om T;Am legges til grunn, ta i betraktning klassen av alle de ting som er mulige individer relativt til w for enhver mulig verden w, videre klassen av alle de entiteter som er mulige verdener relativt til w, osv. for alle de andre relativiserte predikatene i L;Am. La oss videre bemerke at man i T;Am kan bevise at

(Aw)(wêI –> Mg(x: MI;w(x)) SInkl D)

Dette er fordi (Ex)¬MI(x) er et teorem i T;A og vi må derfor følgelig ha i lys av Teorem 7.2.6 og Teorem 7.2.7 i §7 at (Ex)(xêD & ¬MI;w(x)) for alle wêI. Siden man på den annen side også har at (Ax)(MI;w(x) –> xêD) for wêI følger det at Mg(x:MI;w(x)) SInkl D. Siden man også har at (Ex)MI(x) er et teorem i T;A følger det, igjen ved hjelp av Teorem 7.2.6 og 7.2.7 at påstanden Mg(x: MI;w(x)) ≠ø er et teorem i T;Am. Dette sier naturligvis nokså lite om D, men det sier tross alt noe og i tillegg noe som ikke direkte kan uttrykkes i L;A. Det er også klart, om man har T;Am i tankene, at vi i forbindelse med hver verden w kan assosiere en fullstendig modell <E;e,D> for ZFC der E;w=Mg(<x,y>: ê;w(x,y)). Hvordan er dette relasjonsknippet <E;w>/wêI/ relatert til Ê = Mg(<x,y>: xêy)? Det kan nevnes at vi tilsynelatende ikke kan bevise: (Aw)(Aw')(w,w'êI –> E;w = E;w') i T;Am. Dette innebærer i så fall at den relativiserte ê-relasjonen ikke behøver å være den samme i hver verden. Spørsmålet oppstår følgelig om man kan legge denne setningen til T;Am uten at det oppstår motsigelser. Videre kan man også spørre om man konsistent kan utvide T;Am med det følgende aksiom:

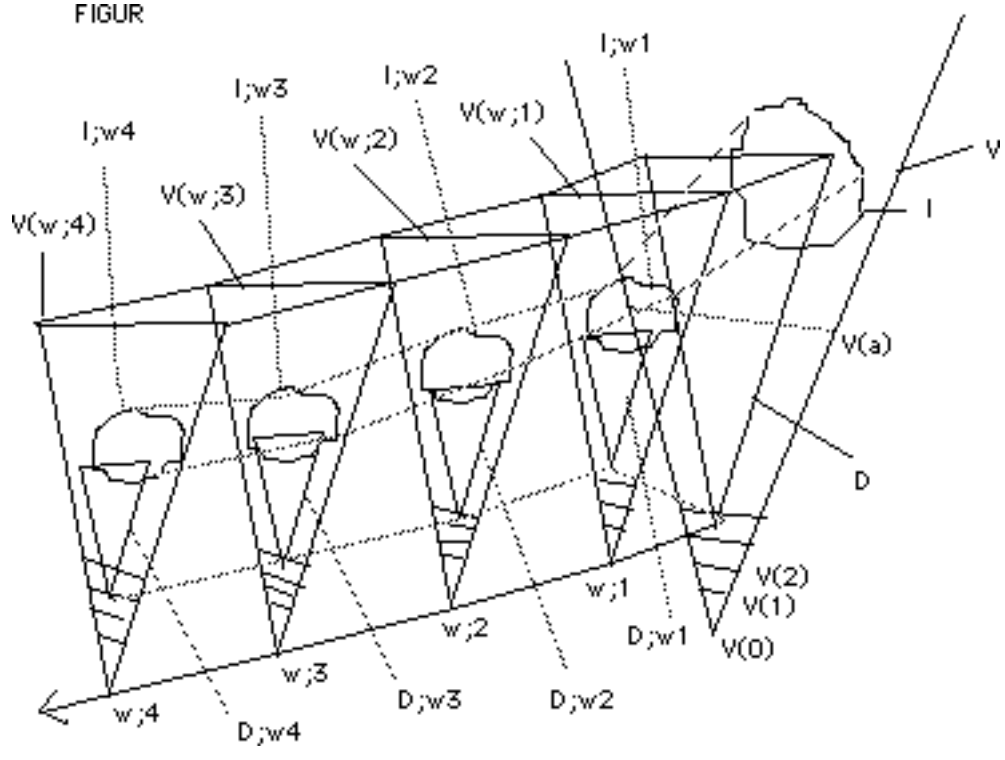
(4) (Ea)(aêO & (Aw)(wêI –> E;w = Rest(Ê, V(a)^2)))

Som man ser er (4) en langt sterkere påstand. Vi skal ikke gå nøyere inn på disse og lignende spørsmål her siden vi ikke i tilstrekkelig grad har undersøkt dem og man på det nuværende tidspunkt vet svært lite om T;Am.

I stedet vil vi som avslutning bare legge til noen enkle bemerkninger som kan bidra til at leseren kan danne seg et litt mer intuitivt bilde av T;Am.

Det skulle være klart, slik som antydet ovenfor, at vi i T;Am kan korrelere hver verden w med en førsteordens modell for T;A. Alle forholdene i T;A vil da intuitivt sett være gjenspeilet i disse modellene V;w, der wêI og
V;w = Mg(x: x=;w x). Det er også klart at vi har E;w = E;wΩ(V;wXV;w). Innenfor hver V;w kan vi finne motstykker til alt vi kan snakke om i T;A. V;w vil f.eks. være delt opp i nivåer på samme måte som V. Inne i V;w vil det også være en mengde som svarer til ordinaltallene On, On;w og de enkelte nivåene i det kumulative hierarki vil ha sine motstykker i V;w, dvs. det er mulig å definere en sekvens <V;w(x)>/xêOn;w/ på samme måte som man definerte hierarkiet <V(a)>/aêOn/. Det skulle også være klart at man ikke kan bevise On;w ~On eller at V;w ~ V siden dette ville implisere eksistensen av V og On. At disse mengdene ikke eksisterer følger fra ZFC-aksiomene som inngår i T;Am. Det følger videre at mengden av mulige individer og mengden av mulige verdener vil ha sine motstykker i de diverse V;w. I denne forbindelse er det neppe upassende å nevne at det neppe er mulig å vise at Mg(x: MI;w(x)) = D eller at Mg(w: MV;w(x)) =I i T;Am. Vi avslutter denne paragrafen med den følgende helt uformelle figur, som kan gi en en viss oversikt over de forhold som vi nettopp har omtalt.

FIGUR



V'en helt til høyre representerer universet V. Vi har antydet nivåene V(0), V(1), V(2),... ved horisontale streker og mengden av mulige individer og mulige verdener ved henholdsvis trekanten og sirkelfiguren innenfor V'en lengst til høyre. Det bør bemerkes at forholdene

mellom disse delene av figuren ikke nødvendigvis representerer de faktiske forhold. De mulige verdenene w1, w2, w3, w4,... tenkes også representert ved punkter på den nederste linjen som peker mot venstre. De diverse V(w1), V(w2), V(w3), ... er representert ved trekanter over denne linjen. Vi har antydet den lagdelte strukturen til disse mengdene ved horisontale linjer. At V(w1), V(w2) svarer til hverandre er forsøkt anskueliggjort ved at vi har tegnet trekantene likedannede. Merk at D;w = Mg(x: xêD & MI;w(x)) og at I;w = Mg(x: MV;w(x)).

****

Kapittel VII

Kapittel VII

§1 Hierarkier av intensjonale objekter.

Teorien T;A kan på mange måter sies å være en temmelig omfattende og i visse henseende sterk teori. I det følgende skal vi se litt mer på hvordan denne teorien kan utvikles videre. Dette innebærer at vi vil gi definisjoner av en rekke nye begreper vi hittil ikke har omtalt og utlede teoremer på grunnlag av aksiomene i T;A angående disse nye begrepene.

La oss først fiksere bruken av endel helt elementære mengdeteoretiske begreper. Seq er mengden av alle endelige sekvenser. Dette innebærer at vi definerer "Seq" ved:

Seq = Mg(x: Func(x) & (En)(nêN;1 & Dom(x) = Mg(m: MêN;1 & m≤n)))

Vi vil skrive "[x1,...,xn]" for en slik sekvens av lengde n. Dette innebærer at dersom a = [x1,...,xn] så er aêSeq og a(i) = xi for i = 1,...,n. Er aêSeq så er lh(a) lengden til sekvensen a. Merk her at "N;1" betegner klassen av de naturlige tall fra og med 1 av. Tallet 0 er altså ekskludert fra N;1. Vi definerer "lh(a)" ved å sette:

lh(a) = Max(Dom(a))

I visse tilfelle kan det være hensiktsmessig å regne med en tom sekvens. Slik Seq er definert ovenfor vil imidlertid en sekvens alltid være ikke-tom og ha en lengde som i det minste er 1. Vi kan imidlertid føye til "U{ø}" etter definiens i definisjonen av "Seq" ovenfor om man ønsker å ta med tomme sekvenser. I så fall må man stipulere at lh(a) = 0 om a =ø og at man bruker definisjonen ovenfor av lh(a) om a er en ikke-tom sekvens.

Vi skal nå definere et bestemt hierarki av objekter som vi vil kalle det intensjonale typeteoretiske hierarki av orden *w*. For dette formål definerer vi først klassen av typer som vi betegner med "T":

Definisjon 1.1 T = SN(Mg(a: {d,i,d*,t} Inkl a &
(Ax1)...(Axn)(x1,..,xnêa –> [x1,...,xn]êa) &
(Ax)(Ay)(x,yêa –> <x,y>êa)))

Denne definisjonen gir imidlertid ingen bestemt mening før man sier hva slags, eller hvilke, objekter d,i, d* og t er. Hva man velger her er forsåvidt vilkårlig. Vi skal la disse fire objektene være henholdsvis tallene 3, 0, 4 og 2.

La oss nå innføre en funksjon k som tilordner de forskjellige typene i T visse objektklasser. Funksjonen k er definert induktivt på klassen T av typer. Definisjonen er denne:

Definisjon 1.2(i) k(d) = D
(ii) k(i) = I
(iii) k(d*) = DU{*}
(iv) k(t) = {0,1}
(v) Er x;1,....,x;nêT er k([x1,....,x;n]) = Prod/i,1,n/(k(x;i))
(vi) Er x,yêT så er k(<x,y>) = k(x)^k(y)

Er têT kalles k(t) for objektene av type t. Som man ser er objektene av type d mengden av de mulige individene. Objektene av type i er klassen av mulige verdener. Videre er objektene av type d* klassen av de mulige individene utvidet med det "ikke-eksisterende" objektet *. Endelig er objektene av type t de to tallene 0 og 1 som henholdsvis representerer sannhetsverdiene usannhet og sannhet.

Funksjonen U = <k(t)>/têT/ kalles for det intensjonale typeteoretiske hierarkiet av orden *w* . Som man ser er dette et forholdsvis rikt hierarki. Dets eksistens kan bevises på grunnlag av ZFC-aksiomene i T;A.

§1.1 En rangordning av objektene i hierarkiet U.

Det er mulig å innføre en rangordning av objektene i U på den følgende måte. Vi definerer en funksjon C, kompleksitetsfunksjonen, ved induksjon på mengden av typer T:

Definisjon 1.1.1
(i) Er tê{d,d*,i,t} er C(t) =1
(ii) Er x;1, ... ,x;nêT er C([x;1,...,x;n]) = Max({C(x;1),....,C(x;n)})
(iii) Er x,yêT har man at C(<x,y>) = C(x) + C(y).

Det er naturlig å kalle C(t), når têT, for komleksiteten til typen t. Som man ser fra definisjonen er kompleksiteten til en type et naturlig tall ≥ 1. Er nêN;1 betegner vi objektene av rang n i U med "U;n" og definerer denne mengden ved:

Definisjon 1.1.2 U;n = Mg(x: nêN;1 & (Et)(têT & C(t) =n & xêk(t)))

Som man ser fra denne definisjonen er klassen av alle de objekter i U som er av rang n identisk med mengden av alle de x som er med i k(t) der t er en type med kompleksitet lik n.

Det er ikke spesielt vanskelig å vise at UN/nêN;1/(U;n) = UN/têT/(k(t)). I stedet for å ha omtalt U som det intensjonale typeteoretiske hierarki av orden *w* ville det kanskje ha vært like naturlig å ha gitt dette navnet til <Un>/nêN;1/. Imidlertid skal vi holde oss konsekvent til den terminologien som vi allerede har innført.

§1.2 Intensjonale objekter.

Med "intensjonale objekter" – et uttrykk som vi ikke skal innlate oss på å gi en presis definisjon av – forstår vi slike ting som attributter, n-ære intensjonale relasjoner, intensjonale funksjoner, individuelle begreper etc. Vi skal imidlertid fastlegge bruken av de sistnevnte uttrykk mer presist innenfor rammen av T;A. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 1.2.1 Anta A er en eller annen ikke-tom mengde og at det samme gjelder B. Da sier vi at

(i) x er et monadisk attributt over A hvis og bare hvis xê((2^I)^A)
(ii) x er en n-ær intensjonal relasjon over A hvis og bare hvis xê((2^I)^(A^n))
(iii) x er et individuelt begrep over A hvis og bare hvis xê(A^I)
(iv) x er en n-ær intensjonal funksjon over A hvis og bare hvis xê((A^I)^(A^n))
(v) x er en n-ær intensjonal funksjon fra A over i B hvis og bare hvis xê((B^I)^(A^n))
(vi) x er et attributt hvis og bare hvis xê((2^I)^D;*
(vii) x er en n-ær intensjonal relasjon hvis og bare hvis xê((2^I)^((D;*)^n))

(viii) x er et individuelt begrep hvis og bare hvis xê((D;*)^I)
(vix) x er en n-ær intensjonal funksjon hvis og bare hvis
xê(((D;*)^I)^((D;*)^n))

Denne definisjonen er naturligvis å oppfatte som en rent konvensjonell stipulativ definisjon. Man kan imidlertid se litt anderledes på saken. I stedet for å ha innført uttrykkene ovenfor ved en definisjon kunne vi ha introdusert dem som primitive predikater, dvs. vi kunne ha utvidet L;A med disse nye predikatene som ikke-logiske predikater og latt de enkelte klausuler i defini-sjonen ovenfor være nye ikke-logiske aksiomer. Man kunne så ha drøftet hvorvidt de nye aksiomene var korrekte i den forstand at de avspeilet den intuitive betydningen til predikatene. Det er ikke utenkelig at dette er tilfelle, med andre ord at definisjonen ovenfor representerer en genuin analyse av de begrepene det her er tale om. Men dette er vanskelig å avgjøre og heller ikke nødvendig for våre formål her. Vi skal derfor la dette spørsmålet ligge.

Vi har så langt ikke innført begrepet 'utsagn'. Dette skjer imidlertid ved den følgende definisjon:

Definisjon 1.2.2 Vi sier at x er et utsagn hvis og bare hvis xê(2^I)

Ser man litt nøyere på Definisjon 1.2.1 ser man at vi har operert med visse operasjoner som til visse objektklasser tilordner andre objektklasser. Hovedsakelig er det fem forskjellige operasjoner vi her har for oss:

(1) g1 = ∂A((2^I)^A)
g2(n) = ∂A((2^I)^(A^n))
g3 = ∂A(A^I)
g4(n) = ∂A((A^I)^(A^n))
g5(n) = ∂A,B((B^I)^(A^n))

Man kan nå bygge opp et hierarki av objekter ved hjelp av disse operasjonene. For å unngå unødvendige komplikasjoner vil vi utelate g5(n) fra betraktningene her. La oss tenke oss at vi starter med området D;* og anvender operasjonene g1 – g4(n) så vilkårlig og meget som mulig. Vi definerer først den følgende funksjon, D, slik:

(2) D(X) = UN/nêN/(g4(n)(X)) U UN/nêN/(g2(n)(X))

Man bør bemerke at g1 = g2(1) og at g3 = g4(0). Man kan nå danne et hierarki på den følgende måte. Man setter H(0) = D;*. Tenker man seg så at H(n) er gitt kan man definere det etterfølgende nivå, H(n+1), ved å sette:

H(n+1) = H(n)U D(H(n))

<H(n)>/nêN/ vil da være et kumulativt hierarki. Formodentlig vil alle de objekter som er med i dette hierarkiet kunne regnes som "intensjonale objekter". Det omvendte kan kanskje virke mer tvilsomt. Det synes ikke urimelig å tro at også elementene i D(UN/nêN/(H(n))) er objekter av en intensjonal karakter. I så fall kunne det være naturlig å utvide hierarkiet ovenfor ved å fortsette det på transfinite nivåer. Det følgende kunne derfor oppfattes som en bedre definisjon:

(i) H(0) = D;*

(ii) H(a+1) = H(a)U D(H(a)) om aêOn
(iii) H(a) = UN/b<a/(H(b)) om aêK;II.

Hierarkiet <H(a)>/aêOn/ synes å være temmelig rikt og man skulle tro at dersom x var et intensjonalt objekt så burde det dukke opp på et eller annet nivå i dette hierarkiet. I så fall kunne man gi sin tilslutning til den følgende tese:

(3) IntO(x) <–> (Ea)(aêOn & xêH(a))

der "IntO(x)" brukes som forkortelse for "x er et intensjonalt objekt". Det er trolig håpløst å gi noe bevis for at (3) er sann. Likevel er jeg tilbøyelig til å se på (3) som en noenlunde dekkende definisjon. Det er imidlertid mulig at man burde innsnevre den noe slik at ikke uten videre ethvert mulig individ regnes som et intensjonalt objekt. I så tilfelle kunne man i stedet for (3) foreslå:

(3.1) IntO(x) <–> xê(UN/nêOn/(H(n)) – H(0))

§1.3 Det enkle typeteoretiske hierarki av attributter.

Vi kan definere det enkle typeteoretiske hierarki av attributter <A(n)>/nêN/ på den følgende måte:

(i) A(0) = D;*
(ii) A(n+1) = (2^I)^(A(n))

Man ser fra denne definisjonen at A(0) er mengden av mulige individer utvidet med det nullobjektet *. A(1) er mengden av funksjoner i (2^I)^(D;*), dvs. mengden av monadiske attributter. A(2) er så i sin tur mengden av attributter over attributter, osv. Det kan være instruktivt å sammenligne dette hierarkiet med to andre temmelig omfattende hierarkier <C(n)>/nêN/ og <B(n)>/nêN/. La oss definere disse. <C(n)>/nêN/ er definert ved:

(i) C(0) = D;*
(ii) C(n+1) = Pt(C(n))

<B(n)>/nêN/ er definert ved:

(i) B(0) = D;*
(ii) B(n+1) = 2^(B(n))

Det er mulig å vise at man kan avbilde de to hierarkiene C(n) og B(n) en-entydig på hverandre. Men la oss først fiksere notasjonen "c(X,Y)", som leses "den karakteristiske funksjonen til mengden X med hensyn på mengden Y", ved å sette:

c(X,Y) = Mg(<1,z>: zêXΩY) U Mg(<0,z>: zê(Y–X))

Er X en delmengde av Y skulle det være klart at c(X;Y) er en funksjon og at c(X,Y)ê(2^I). Man kan også innføre en invers funksjon som avbilder elementene i 2^Y på Pt(Y). Vi betegner denne inverse funksjonen "c;-1" og definerer:

c;-1(X,Y) = Mg(z: X(z)=1 & Xê(2^Y))

Som man ser meget raskt har man, dersom X Inkl Y at c;-1(c(X,Y),Y) = X.

La oss så definere e en-entydig avbildning a UN/nêN/(C(n)) på UN/nêN/(B(n)). Vi definerer et knippe av funksjoner j;n for nêN ved induksjon på n slik:

(i) j;0(x) = x om xêD;*
(ii) j;(n+1)(x) = c((j;n)"x, B(n)) om xêC(n+1)

Vi overlater nå til leseren å verifisere den følgende enkle sats:

Teorem 1.3.1 (i) j;n er en-entydig for alle nêN
(ii) (An)(nêN –> (Dom(j;n) = C(n) & Rgn(j;n) = B(n)))

Siden de diverse C(n) for nêN er disjunkte følger det at UN/jêN/(j;n) er en funksjon. I lys av Teorem 1.3.1 må denne avbilde C= UN/nêN/(C(n)) en-entydig på B = UN/nêN/(B(n)).

<C(n)>/nêN/ kalles for det enkle typeteoretiske hierarki av mengder. La oss nå vise hvordan de enkelte mengdene i dette hierarkiet kan identifiseres med korresponderende attributter i hierarkiet <A(n)>/nêN/. Tanken er å identifisere de enkelte mengder i hierarkiet <C(n)>/nêN/ med tilsvarende konstant-funksjoner i hierarkiet <A(n)>/nêN/.

Vi skal definere en avbildning q;n for hvert nêN som avbilder C(n) en-entydig på en delmengde X Inkl A(n). q;n defineres ved induksjon på n på den følgende måte:

(i) q;0 = Mg(<x,x>: xêC(0))
(ii) q(n+1) = Mg(<x, Mg(<y, ∂êI(1)>: yê(q;n)"x)U
Mg(<y,∂wêI(0)>: yê(A(n) –(q;n)"x)>: xêC(n+1))

Det er også nå en forholdsvis enkel sak å verifisere følgende sats:

Teorem 1.3.2 (i) q;n er en-entydig for alle nêN
(ii) (An)(nêN –> (Dom(q;n) = C(n) & Rgn(q;n) Inkl B(n)))

Vi overlater beviset for dette, et enkelt induksjonsbevis på n, til leseren. Det følgende kan oppfattes som et korollar til Teorem 1.3.2:

Teorem 1.3.3 (i) xêC(n+1) & yêx –> (Aw)(wêI –> (q;(n+1)(x))(q;n(y))‘w=1)
(ii) xêC(n+1) & yê(C(n)–x) –>
(Aw)(wêI –> (q;(n+1)(x))(q;n(y))‘w=1)

Også i forbindelse med denne satsen overlater vi beviset til leseren.

Ser man nå på q = UN/nêN/(q;n) følger det at q er en en-entydig avbildning av C inn i UN/nêN/(A(n)). Videre må vi ha i lys av det som er sagt ovenfor at q°(j;-1) er en en-entydig avbildning av B inn i A. For er xêB har vi
j;-1(x)ê C og følgelig at (q°(j;-1))(x)êA. Det skulle også være temmelig lett å se at q°(j;-1) er en-entydig.

Vi har så langt rettet oppmerksomheten mot det enkle typeteoretiske hierarkiet av attributter. Dette er delvis fordi det har en struktur som nesten "automatisk" trenger seg inn i bevisstheten, delvis fordi det er helt analogt med det enkle typeteoretiske hierarkiet av mengder. Som vi har sett kan det siste hierarkiet avbildes inn i det første på en naturlig måte ved å identifisere mengder med en spesiell type attributter, nemlig de attributter x der man

har at x(a)‘w =1 for alle mulige verdener w om a er et objekt som er med i domenet til x. Ytterligere en grunn til å rette oppmerksomheten mot begge disse hierarkiene er at de begge er delhierarkier av det som i §1 ble omtalt som det intensjonale typeteoretiske hierarki av orden *w*.

La oss å utdype innholdet i denne siste påstanden. Vi definerer en klasse med typer som vi vil betegne med T(A). Dette er den minste mengden X som oppfyller de følgende to krav: (i) d*êX (ii) Er y et objekt i X så er også <<t,i>,y>êX. Som man ser inneholder T(A) typene d*, <<t,i>,d*>, <<t,i>,<<t,i>,d*>> osv. i det uendelige.

man kan nå definere en funksjon f: T(A) –> N ved induksjon på T(A). Dette gjøres ved å sette:

(i) f(d*) = 0
(ii) f(<<t,i>,y>) = n+1 om f(y)=n og yêT(A).

Man kan nå lett vise at f er en en-entydig funksjon som avbilder T(A) ikke bare inn i N, men på N. Videre kan man vise at k(t) = A(f(t)) for alle têT(A). Man ser altså at hierariet <k(t)>/têT(A)/ i det vesentlige er det samme som hierarkiet <A(n)>/nêN/.

Vi viste ovenfor at man igrunnen kunne anse B og C for i det vesentlige å være det samme hierarki. La oss nå se på hvordan <B(n)>/nêN/ kan innpasses i det intensjonale typeteoretiske hierarki av orden *w*. Først definerer vi en typeklasse T(B) som den minste mengden X der man har at (i) d*êX og (ii) <t,y>êX så ofte som yêX. Dernest defineres funksjonen s: T(B) –> N ved induksjon på T(B) ved:

(i) s(d*) = 0
(ii) s(<t,y>) = s(y)+1 om yêT(B)

Man kan også i dette tilfelle lett bevise at s en-entydig avbilder T(B) på N. I lys av dette kan man igjen si at <k(t)>/têT(B)/ i det vesentlige er det samme hierarkiet som <B(n)>/nêN/. Det siste kan derfor oppfattes som Rest(U,T(B)). Likeledes kan <A(n)>/nêN/ oppfattes som i det vesentlige Rest(U,T(A)). Man erindrer i denne forbindelse at U = <k(t)>/têT/.

Som et korollar til Teorem 1.3.1 og Teorem 1.3.2 har man:

Teorem 1.3.4 (i) q;n°((j;n);-1) er en-entydig for alle nêN
(ii) (An)(nêN –> (Dom(q;n°((j;n);-1)) = k(s;-1(n)))
(iii) (An)(nêN –> Rgn(q;n°((j;n);-1)) Inkl k(f;-1(n)))

La oss bemerke følgende: Det synes ikke å være noe i veien for å generalisere hierarkiene B,C og A noe ved å forsette dem på transfinite nivåer. Når det gjelder f. eks. A-hierarkiet kunne dette defineres induktivt slik:

(i) A(0) = D;*
(ii) A(a+1) = (2^I)^(A(a))
(iii) A(b) = UN/a<b/(A(a)) om b er et limesordinaltall.

Man ser da at hierarkiet <A(n)>/nêN/ bare utgjør så og si et "begynnelsesstykke" av sekvensen <A(a)>/aêOn/. På tilsvarende måte kunne man definere C og B bortsett fra at de operasjonene som nå må brukes for å generere hierarkiene er henholdsvis ∂X(Pt(X)) og ∂X(2^X). I denne forbindelse kan det også være av interesse å definere det man kunne kalle

det enkle typeteoretiske attributthierarki over grunnområdet X : <A(a,X)>/aêOn/. Dette kan defineres ved tranfinit induksjon slik:

(i) A(0,X) = X
(ii) A(a+1,X) = (2^I)^(A(0,X))
(iii) A(b,X) = UN/a<b/(A(a,X)) om b er et limesordinal, ie. bêK;II.

I forbindelse med det siste hierarkiet bør man bemerke at A(a,D;*) = A(a) for alle aêOn.

I alle de hierarkiene som så langt er blitt betraktet er de enkelte nivåene disjunkte. Hierarkiene er derfor ikke kumulative. Vi skal kort se på et kumulativt hierarki i den neste paragrafen.

§1.4 Det kumulative attributthierarki over området X.

Det kumulative attributthierarki over området X, der X er en eller annen mengde, defineres ved transfinite induksjon på den følgende måte:

(i) A(0,X) = X
(ii) A(a+1,X) = A(a,X)U (2^I)^(A(a,X))
(iii) A(b,X) = UN/a<b/(A(a,X)) om bêK;II

Man ser at de enkelte nivåene i hierarkiet ikke lenger er disjunkte, men at man tvertimot har at A(a,X) SInkl A(b,X) om a,bêOn og a<b. Størrelsen <A(a,ø)>/aêOn/ kunne man kalle det rene kumulative attributthierarki i analogi med det rene kumulative mengdehierarki.

Det er imidlertid visse ulemper ved å bygge opp det kumulative attributthierarki på den måten som er beskrevet ovenfor selvom det naturligvis er mulig å studere strukturer av denne typen. Betrakter man f.eks. <A(a,D;*)>/aêOn/ og en xê((2^I)^D;*) Inkl A(1, D;*) kan det finnes yê(2^I)^(A(1,D;*)) som er slik at Rest(y, D;*) = x. Dette skaper visse komplikasjoner som vi ønsker å unngå.

I stedet for å velge fremgangsmåten ovenfor kan det derfor være mer hensiktsmessig å studere det følgende hierarki <Ac(a,X)>/aêOn/, der X er en eller annen mengde, istedet:

(i) Ac(0,X) = X
(ii) Ac(a+1,X) = Ac(a,X)U (Pt(Ac(a,X)))^I
(iii) Ac(b,X) = UN/a<b/(Ac(a,X)) om bêK;II

Vi vil kalle Ac definert på denne måten for det kumulative attributt-hierarki over X og kaller <Ac(a,ø)>/aêOn/ for det "rene" kumulative attributt-hierarki.

La oss imidlertid med en gang gjøre det klart at vi ikke skal studere disse hierarkiene nøyere på dette punkt. En mer utførlig fremstilling vil bli gitt i §3.

§1.5 Utvidelse av det intensjonale typteoretiske hierarki til transfinite nivåer.

I denne paragrafen vil vi oppholde oss noe ved spørsmålet om hvordan det intensjonale typeteoretiske hierarkiet av orden w[7] kan utvides til transfinite nivåer. Muligens er det flere måter å gjøre dette på. Her skal vi av naturlige grunner bare se på en slik måte. Først defineres operasjonen C ved den følgende definisjon:

[7] Merk at i denne og de følgende paragrafer brukes "w" til å betegne det første uendelige ordinaltallet. Med andre ord det første ordinaltallet etter 0,1,2,3,4,..... .

Definisjon1.5.1 C(X) er den minste mengden Y som oppfyller de følgende krav:

(i) (Ax)(xêX –> xêY)
(ii) (Ax;1)...(AX;n)(x;1,...,x;nêY –> [x;1,...,x;n]êY)
(iii) (A)(Ay)(x,yêY –> <x,y>êY)

Benyttes denne definisjonen ser man at klassen av typer T, som ble definert ved Definisjon 1.1 i §1, er C({d,i,d*,t}).

Gitt denne definisjonen defineres nå en typeklasse T;b for hvert bêOn på den følgende måte:

(i) T;w = T
(ii) Er a≥w så er T;(a+1) = C(T;aU{a})
(iii) Er b≥w & bêK;II setter man T;b= UN/a<b/(T;a)

Det bør bemerkes at T;a SInkl T;b om a<b og begge ordinaltallene a og b er større eller lik w. <T;a>/aêOn/ er altså en strengt monoton sekvens av typeklasser. Som et eksempel på hva som nå kan regnes som typer kan man legge merke til at for eksempel <<w,w>,<<w,w>,w>>, <<t,i>w> etc. er elementer i T;(w+1).

Det vi nå trenger for hvert aêOn er en typetilordner X(a) som tilordner de enkelte typene t i T;a klasser av objekter. Det er naturlig å definere X(a) slik at Rest(X(b), T(a)) = X(a) om a,bêOn og b>a.

X(a) defineres ved transfinit induksjon på den følgende måte:

(i) X(w) = k
(ii) Er a≥w så er X(a+1) den minste mengden Z som oppfyller de følgende krav:
  (a) Func(Z)
  (b) Dom(Z) = C(T;a U {a})
  (c) X(a) U {<a, UN/têT;a/(X(a)‘t)>} Inkl Z
  (d) (Ay;1)...(Ay;n)[y;1,...,y;nê(T;aU{a}) –> Z([y;1,...,y;n]) = Prod/i,1,n/(Z(y;i))]
  (e) (Ay)(Ax)(y,x ê(T;aU{a}) –> Z(<y,x>) = Z(y)^Z(x))
(iii) Er b≥w & bêK;II setter man X(b) = UN/a<b/(X(b)).

Gitt denne definisjonen kan man definere det intensjonale typeteoretiske hierarki av orden a, der aêOn (a≥w) som <X(a)‘t>/têT;a/.

Vi nevner her denne utvidelsen av U (som ble definert i §1) fordi den har en viss prinipiell interesse og fordi vi i de neste paragrafer skal presentere en teori om det intensjonale typeteoretiske hierarkiet av orden w. I lys av det som her har blitt sagt er det derfor mulig å utvide denne teorien til også å omfatte de langt "rikere" hierarkiene som vi har avgrenset ovenfor.

§2 Intensjonale språkstrukturer av orden w.

Et interessant spørsmål som umiddelbart oppstår er hvordan man kan kodifisere strukturen U innenfor et språk og hva slags språk som i så fall er best egnet. Vi vil nå se på hva slags språk L som kan være formålstjenelige i denne sammenheng og hva slags krav som det er rimelig å stille til dem. På basis av de mer uformelle betraktningene som gjøres her vil vi så

presentere en formell definisjon av en klasse med språkstrukturer: klassen av de intensjonale språkstrukturer av orden w.

L må naturligvis inneholde en klasse av uttrykk. Vi betegner denne med Exp(L) og antar naturligvis at den er ikke-tom. Videre virker det naturlig å kreve at man i L kan assosiere visse uttrykkskategorier med hver type i têT. Vi skal altså anta at for hver type têT finnes det en bestemt kategori av uttrykk av denne typen i L. Vi betegner kategorien av uttrykk i L av type t med "Cat(t,L)". "Cat(t,L)" kan leses " klassen av uttrykk av type t i L". Er t1 og t2 to forskjellige typer i T er det rimelig å kreve at uttrykksklassene Cat(t1, L) og Cat(t2,L) er disjunkte. Videre er det naturligvis rimelig å kreve at Cat(t,L) Inkl Exp(L) om têT. Vi vil også anta at det i L finnes variabler av hver type. Er derfor têT vil Var(t,L) være en tellbart uendelig mengde med uttrykk i L, variabeltegnene av type t i L. Er uêVar(t,L) tenker vi oss at de mulige verdiene til variabeltegnet u er elementene i k(t) og ingen andre. Vi skal altså kreve at <Var(t,L)> er en mengdefamilie og at de enkelte uttrykksmengder i denne familien er innbyrdes disjunkte.

For å kunne beskrive strukturen U på en mest mulig fullstendig måte synes det også naturlig å innføre konstruksjoner som gitt uttrykk som tilhører viss kategorier gir oss uttrykk i andre kategorier. For å kunne avgrense nærmere den typen av konstruksjoner vi har i tankene finner vi det formålstjenlig å innføre visse hjelpebegreper.

Klassen av typeindekser, TypSeq, er definert ved:

TypSeq = Mg(x: Func(x) & (En)(nêN;1 &
Dom(x) = Mg(y: y≤n & nêN) & Rn(x) Inkl T))

Det fremgår fra definisjonen at en typeindeks er en hvilken som helst endelig sekvens av typer hentet fra T. Klassen av konstruksjonsindekser, KonIndex, er nå definert slik:

KonIndex = Mg(<t,f,g,h>: têT & f,g,hêTypSeq)

En konstruksjonsindeks er altså et 4-tuppel der den første komponenten er en type og de resterende komponentene er typesekvenser. I et språk L av den typen vi her har i tankene skal vi nå tenke oss at vi for hver iêKonIndex har en klasse av konstruksjoner av type i i L. Denne betegner vi med Cn(i,L). Den kan være tom. Er nå xêCn(i,L) der i = <t,f,g,h>êKonIndex og lengden til sekvensene f,g og h er henholdsvis m,n og k (m,n,kêN) så skal x være en funksjon der

Dom(x) = Cat(f(1),L)X...XCat(f(m),L) X Cat(g(1),L)X...XCat(g(n),L) X
Cat(h(1),L)X.....X Cat(h(k),L)

og hvor man har Rgn(x) Inkl Cat(t,L). Er <a;1,...,a;m,b;1,...,b;n, c;1,...,c;k>êDom(x) krever vi også at de diverse a;1,...,a;m er distinkte. Man ser at denne konstruksjonsteorien er en likefrem generalisering av den tilsvarende teorien om konstruksjoner i den lingvistiske delen av T;A.

Mer formelt kan vi nå gi den følgende definisjon av uttrykket "L er en intensjonal språkstruktur av orden w" – "IntS;w(L)":

Definisjon 2.1 Vi sier at L er en intensjonal språkstruktur av orden w, IntS;w(L) hvis og bare hvis L er en struktur

<Exp, <Var(t)>/têT/, <Cn(i)>/iêKonIndex/,<Cat(t)>/têT/> der de forskjellige komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) Exp er en ikke-tom mengde.

(ii) For hvert têT er Var(t) en en-entydig funksjon i mengden Exp^N. Vi krever at de enkelte mengder i familien <Rgn(Var(t))>/têT/ er innbyrdes disjunkte.

(iii) Er iêKonIndex og i = <t,f,g,h> så er Cn(i) en mengde med funksjoner. Er xêCn(i) kreves det følgende av x:

(a) Dom(x) = Exp^(lh(f)+ lh(g) +lh(h))

(b) Rgn(x) Inkl Exp

(c) x er en en-entydig funksjon

(iv) Vi krever at uttrykksmengdene Rgn(Var(t)) for têT og de forskjellige Rgn(x) der xêCn(i) for iêKonIndex skal være innbyrdes disjunkte.

(v) <Cat(t)>/têT/ er den minste mengdefamilien <Z(t)>/têT/, der Z(t) Inkl Exp for têT, som oppfyller følgende krav:

(a) (At)(têT –> Rgn(Var(t)) inkl Z(t)

(b) Er i=<t,f,g,h> êKonIndex, lh(f)=m, lh(g)= n, lh(h) =k, videre $êCn(i) og <a;1,...,a;m,b;1,...,b;n, c;1,...,c;k>ê

Var(f(1))X...XVar(f(m))X Z(g(1))X...X Z(g(n))X Z(h(1))X ... XZ(h(k)) der a;1,...,a;m er distinkte så er:

$(<<a;1,...,a;m,b;1,...,b;n, c;1,...,c;k>)êZ(t)

Noen kommentarer til denne definisjonen: Det skulle ikke være spesielt vanskelig å vise, på basis av ZFC-aksiomene i T;A at strukturer av typen

<Exp, <Var(t)>/têT/, <Cn(i)>/iêKonIndex/>

som oppfyller kravene (i) – (iv) ovenfor faktisk finnes. Det skulle også være mulig ved hjelp av et forholdsvis likefrem mengdeteoretik resonnement å bevise eksistensen og entydigheten til et slikt kategorisystem <Cn(t)>/têT/ som er omtalt i klausul (v) i definisjonen.

Vi har så langt gitt en rigorøs definisjon av begrepet 'intensjonal språkstruktur av orden w'. Imidlertid oppfatter vi ikke uten videre strukturer av denne type som språk i egentlig forstand. Bare når en slik struktur kombineres med en meningstilordning, eller intepretasjon, synes det rimelig å si at man har foran seg noe som rimligvis kan kalles et språk. La oss derfor definere hva vi vil forstå med en intepretasjon av en intensjonal språkstruktur av orden w:

Definisjon 2.2 Vi sier at Z er en intepretasjon av den intensjonale språkstrukturen L av orden w, i symboler Intpr;w(Z,L) hvis og bare hvis Z og L oppfyller de følgende krav:

(i) IntS;w(L)

(ii) Func(Z)

(iii) Dom(Z) = UN/iêKonIndex/(Cn(L)(i)) der Cn(L) = (L);3

(iv) Er i=<t,f,g,h>êKonIndex, lh(f)= m, lh(g)= n, lh(h)=k og er videre $ê((L);3(i)) så er

Z($) ê k(t)^C der:

C= k(g(1))^H X...X k(g(n))^HX k(h(1))^HX...X k(h(k))^H

og H= k(f(1))X ... X k(f(m))

Har man at IntS;w(L) og at Z er en intepretasjon av L ser man at Z tilordner alle konstruksjonene i L betydninger. Imidlertid tilordner ikke Z de enkelte elementene i UN/têT/ ((L);4(t)), dvs. de enkelte uttrykk av de forskjellige kategoriene i språket noen betydning. Vi kan imidlertid for hvert par <L,Z> der L er et intensjonalt språk av orden w og Z er en meningstilordner for L definere en avledet meningstilordner som tilordner alle uttrykkene i de forskjellige kategorier i L meningstørrelser relativt til en verditilordning v. Vi må følgelig definere hva som forstås med en verditilordning for en intensjonalspråkstruktur av orden w:

Definisjon 2.3 Vi sier at v er en verditilordning for den intensjonale språkstrukturen L av orden w, i symboler "Vt;w(v,L)" hvis og bare hvis v og L oppfyller de følgende krav:

(i) Func(v)
(ii) Dom(v) = UN/têT/(Rgn((L);2(t)))
(iii) (At)(Az)(têT & zêRgn((L);2(t)) –> v(z)êk(t))

Som man ser fra denne definisjonen vil en verditilordning v for L tilordne alle variablene av type t i L, ie. elementene i Rgn((L);2(t)) objekter i klassen k(t), dvs. objekter av type t.

Man kan nå definere en avledet meningstilordner, ∏(v,L,Z), der IntS;w(L), v er en verditilordning for L og Z en intepretasjon av L, ved den følgende definisjon:

Definisjon 2.4 Anta IntS;w(L) & Vt;w(v,L) & Intepr;w(Z,L). Da er funksjonen ∏(v,L,Z) der
(i) Dom(∏(v,L,Z)) = UN/têT/((L);4(t)) og
(ii) Rgn(∏(v,L,Z)) Inkl UN/têT/(k(t))
definert induktivt ved de følgende to klausuler:
(a) (At)(Au)(têT & uêRgn((L);2(t)) –> ∏(v,L,Z)(u) = v(u))
(b) Anta at i = <t,f,g,h>êKonIndex, lh(f) = n, lh(g) =n og lh(h) = k. Anta videre at $ê((L);3(i)) og at V(f(i)) êRgn((L);2(f(i))) for i = 1,...,m og E(g(i))ê (L);4(g(i)) for i= 1, ... , n og endelig at E(h(i))ê (L);4(h(i)) for i= 1, ... , k. Da setter man:
∏(v,L,Z)[$(V(f(1)),....,V(f(m)), E(g(1)), ...,E(g(n)), E(h(1)), ... ,E(h(k))] =
Z($)(X;1,...,X;n, Y;1,...,Y;k) der
X;i = ∂<a;1,....,a;n>êProd/j,1,m/(k(f(j))(F(i,a;1,....,a;m)) der
F(i,a;1,....,a;m)= ∏(y(V(f(1)),...,V(f(m))/a;1,...,a;m),L,Z)(E(g(i)) for i=1,...,n og
Y;i = ∂<a;1,....,a;n>êProd/j,1,m/(k(f(j))(F(i,a;1,....,a;m)) der
F(i,a;1,....,a;m)= ∏(y(V(f(1)),...,V(f(m))/a;1,...,a;m),L,Z)(E(h(i)) for i=1,...,k .

Teorien om intensjonale hierarkier av type w som vi har fremlagt ovenfor kan betraktes som en utvidelse av T;A. Imidlertid er det en utvidelse av denne teorien med nye definisjoner og ikke en utvidelse som har bestått i at vi har beriket T;A med nye ikke-logiske aksiomer.

For å kunne utvikle teorien noe mer, dvs. for å kunne formulere enkelte satser om intensjonale språkstrukturer av orden w finner vi det hensiktsmessig å gi detaljerte definisjoner av endel elementære syntaktiske begreper. Først gir vi den følgende definisjon som viser hva som menes med en konstant i et intensjonalt språk av orden w og hva som menes med et velformet uttrykk i et slikt språk. Vi bruker "Con(L)" som forkortelse for "Mengden av konstanter i L" og "VFExp(L)" som forkortelse for "Mengden av velformede uttrykk i L".

Definisjon 2.5(i) VFExp(L) = UN/têT/((L);4(t))
(ii) Con(L) = Mg(x: IntS;w(L) & (Ej)(Et)(jêKonIndex &
têT & j=<t,ø,ø,ø> & xê((L);3(j)))

I forbindelse med denne definisjonen bemerkes det at den tomme sekvensen regnes med blandt typesekvensene. Vi definerer så hva som menes med et variabeltegn i et intensjonalt språk av type w. Klassen av variabeltegn i L betegnes med "Var(L)".

Definisjon 2.6(i) Var(L) = Mg(x: IntS;w(L) & xêUN/têT/(Rgn((L);2(t))))

Vi trenger også en definisjon av predikatet "x er et variabeltegn som forekommer fri i det velformede uttrykket w i språket L". Dette forkortes med "Fr;L(x,y)". Definisjonen som foreslås er denne:

Definisjon 2.7 Fr;L(x,w) hvis og bare hvis

(i) IntS;w(L) & xêVar(L) & wêVFExp(L) og vi har enten:
(a) wêVar(L)UCon(L) og w=x eller vi har:
(b) Det finnes iêKonIndex der lh((i);2) = m, lh((i);3) =n og lh((i);4) = k.
Det finnes V;1,...,V;mêVar(L), videre A;1,...,A;n,B;1,...B;kêVFExp(L)
og $êRgn((L);3) slik at de følgende betingelser er oppfylt:
(i) (Aj)(1≤j ≤m –> V;jêRgn((L);2((i);2(j)))
(ii) (Aj)(1≤j ≤n –> A;jêRgn((L);4((i);3(j)))
(ii) (Aj)(1≤j ≤k –> A;jêRgn((L);4((i);4(j)))
(iv) $ê((L);3((i);1)
(v) w= $(V;1,...,V;m,A;1,...,A;n,B;1,...,B;k) & ¬(xê{V;1,...,V;m}) &
(Ej)(jê{1,..,n} & Fr;L(x,A;j)) v (Ej)(jê{1,..,k} & Fr;L(x, B;j))

Dernest trenger vi en definisjon av uttrykket "x er et variabeltegn som er fritt for uttrykket z i uttrykket w", "Fri;L(x,z,w)":

Definisjon 2.8 Fri;L(x,z,w) hvis og bare hvis
(i) IntS;w(L) & xêVar(L) &(Et)(têT & z,wê((L);4(t)) & Fr:L(x,w) og vi har enten:
(a) wêVar(L)UCon(L) eller vi har:
(b) Det finnes iêKonIndex der lh((i);2) = m, lh((i);3) =n og lh((i);4) = k.
Det finnes V;1,...,V;mêVar(L), videre A;1,...,A;n,B;1,...B;kêVFExp(L)
og $êRgn((L);3) slik at de følgende betingelser er oppfylt:
(i) (Aj)(1≤j ≤m –> V;jêRgn((L);2((i);2(j)))
(ii) (Aj)(1≤j ≤n –> A;jêRgn((L);4((i);3(j)))
(ii) (Aj)(1≤j ≤k –> A;jêRgn((L);4((i);4(j)))
(iv) $ê((L);3((i);1)
(v) w= $(V;1,...,V;m,A;1,...,A;n,B;1,...,B;k) &
(Ai)(iê{1,...,m} –> ¬Fr;L(V;i,z) &((Ej)(jê{1,..,n} & Fri;L(x,z,A;j))
v (Ej)(jê{1,..,k} & Fri;L(x,z, B;j)))

Dernest trenger vi en definisjon av "Resultatet av å substituere uttrykket z for den frie variabelen x i uttrykket w i språket L" – "Sub;L(x,z,w)".

Definisjon 2.9y= Sub;L(x,z,w) hvis og bare hvis
(i) IntS;w(L) & xêVar(L) &(Et)(têT & y,z,wê((L);4(t)) & Fr:L(x,w) og vi har enten:
(a) (w=x & y=z) eller wêVar(L)UCon(L)& w≠x & y=w eller vi har:
(b) Det finnes iêKonIndex der lh((i);2) = m, lh((i);3) =n og lh((i);4) = k.
Det finnes V;1,...,V;mêVar(L), videre A;1,...,A;n,B;1,...B;kêVFExp(L)
og $êRgn((L);3) slik at de følgende betingelser er oppfylt:
(i) (Aj)(1≤j ≤m –> V;jêRgn((L);2((i);2(j)))
(ii) (Aj)(1≤j ≤n –> A;jêRgn((L);4((i);3(j)))
(ii) (Aj)(1≤j ≤k –> A;jêRgn((L);4((i);4(j)))
(iv) $ê((L);3((i);1)
(v) w= $(V;1,...,V;m,A;1,...,A;n,B;1,...,B;k) &
((Fri;L(x.z.w)& Y= $(V;1,...,V;m,Sub;L(x,z,A;1),.....,Sub;L(x,z,B;k)) v
(¬Fri;L(x,z,w) & y=w)

Når det er klart fra konteksten hvilket språk det er vi har i tankene vil vi sløyfe språkparameteren L i "Sub;L(x,z,w)", "Fri;L(x,z,w)" og "Fr;L(x,w)". I stedet for "Sub;L(x,z,w)" vil vi også bruke den vanligere skrivemåten "w;x[z]". Det skulle vel også være klart i lys av Definisjon 2.9 hvordan man kan definere rigorøst den mer generelle substitusjonsfunksjonen w;(x;1,...,x;n)[z;1,...,z;n] der x;1,...,x;n er en sekvens av distinkte variabeltegn i L og hvor z;1,...,z;n er en tilsvarende sekvens av velformede uttrykk i L

Definisjon 2.10

(i) Fm(L) = Mg(x: IntS;w(L) & xê((L);4(<t,i>))
(ii) Tm(L) = Mg(x: IntS;w(L) & xê((L);4(<d*,i>))
(iii) CFm(L) = Mg(x: IntS;w(L) & xêFm(L) & ¬(Ey)(yêVar(L) & Fr;L(y,x))
(iii) CTm(L) = Mg(x: IntS;w(L) & xêTm(L) & ¬(Ey)(yêVar(L) & Fr;L(y,x))

Fm(L), Tm(L), CFm(L) og CTm(L) er henholdsvis mengden av formler i L, mengden av termer i L, mengden av lukkede formler i L og mengden av lukkede termer i L.

Definisjon 2.11 Anta ∑ = <L,Z> der L er en intensjonal språkstruktur av orden w og Z er en intepretasjon av Z. Anta videre at wêI & FêFm(L) og at v er en verditilordning for L. Da setter vi:

(i) True(F,L,v,w) <–> (∏(v,L,Z)(F))(w) =1
(ii) True(F,L,w) <–> (Av)(Vt;w(v,L) –> True(F,L,v,w))
(iii) Val(F,L) <–> (Aw)(wêI –> True(F;L,w))

Uttrykket "True(F,L,v,w)" kan leses "Formelen F er sann i språket L relativt til verdenen w og verditilordningen v". Videre lese "True(F,L,w)" som "Formele F er sann i språket L relativt til verdenen w". Endelig kan uttrykket "Val(F,L)" leses "Formelen F er gyldig i språket L".

Den følgende definisjon introduserer et begrep som også er nyttig i en del sammenhenger:

Definisjon 2.12 f = Mg(<x, ∂wêI(x)>: xêD)

Man ser umiddelbart at f er en funksjon som avbilder D på en delmengde X av D;*^I. Videre fremgår det at f er en en-entydig funksjon. Er xêD er f(x) konstantfunksjonen som til enhver verden tilordner denne objektet x.

Vi ønsker nå å formulere endel teoremer om intensjonale språkstrukturer av orden w som lar seg bevise innenfor rammen av T;A. For dette formål skal vi bruke bokstaven "Q" som forkortelse for en temmelig komplisert betingelse. Hva "Q" forkorter fremgår av den følgende definisjon.

Definisjon 2.13 "Q" brukes som forkortelse for de følgende betingelser:

(i) IntS;w(x) & Intepr;w(z,x)
(ii) Indv ê ((x);3(<<t,i>,ø,[<d*,i>],ø>)
(iii) –>, v, & <–> ê (x);3(<<t,i>,ø,[<t,i>,<t,i>],ø>)
(iv) ¬, Nec,Pos ê (x);3(<<t,i>,ø,[<t,i>],ø>)
(v) A, E, A.,E. ê (x);3(<<t,i>,[<d*,i>],[<t,i>],ø>)
(vi) =, ~ ê (x);3(<<t,i>,ø,[<d*,i>,<d*,i>],ø>)
(vii) (AX)(Aw)(Xê((2^I)^(D;*^I)) & wêI –>.

z(A)(X)‘w =1 <–> (Aa)(aêD;*^I –> X(a)‘w =1))

(viii) (AX)(Aw)(Xê((2^I)^(D;*^I)) & wêI –>.
z(E)(X)‘w =1 <–> (Ea)(aêD;*^I & X(a)‘w =1))

(ix) (AX)(Aw)(Xê((2^I)^(D;*^I)) & wêI –>.
z(A.)(X)‘w =1 <–> (Aa)(aê*f*"D –> X(a)‘w =1))

(x) (AX)(Aw)(Xê((2^I)^(D;*^I)) & wêI –>.
z(E.)(X)‘w =1 <–> (Ea)(aê*f*"D & X(a)‘w =1))

(xi) (AX)(AY)(Aw)(X,Yê(2^I) &wêI –>. z(&)(X,Y)‘w =1 <–> X(w) = Y(w) =1)

(xii) (AX)(AY)(Aw)(X,Yê(2^I) &wêI –>.
z(v)(X,Y)‘w =1 <–> (X(w) =1 v Y(w) =1))

(xiii) (AX)(AY)(Aw)(X,Yê(2^I) &wêI –>.
z(–>)(X,Y)‘w =1 <–> (X(w) =1 –> Y(w) =1))

(xiv) (AX)(AY)(Aw)(X,Yê(2^I) &wêI –>. z(<–>)(X,Y)‘w =1 <–> X(w) = Y(w))

(xv) (AX)(Aw)(Xê(2^I) &wêI –>. z(¬)(X)‘w =1 <–> X(w) = 0)

(xvi) (AX)(Aw)(Xê(2^I) &wêI –>. z(Nec)(X)‘w =1 <–>(Ay)(yêI –> Y(w) = 1))

(xvii) (AX)(Aw)(Xê(2^I) &wêI –>. z(Pos)(X)‘w =1 <–> (Ey)(yêI & Y(w) = 1))

(xviii) (AX)(AY)(Aw)(X,Yê(D;*^I & wêI –>.
z(=)(X,Y)‘w = 1 <–> X(w) = Y(w))

(xix) (AX)(AY)(Aw)(X,Yê(D;*^I & wêI –>. z(~)(X,Y)‘w = 1 <–> X = Y)

(xx) (AX)(Aw)(Xê(D;*^I & wêI –>.
z(Indv)(X)‘w = 1 <–> (Ey)(yêD & (Az)(zêI –> X(z)=y)

(xxi) v = (x);2(<d*,i>)

Som man ser er denne betingelsen noe komplisert. Det kan derfor være på plass med en del forklarende bemerkninger. (i) uttrykker at x er en intensjonal språkstruktur av orden w og at z er en intepretasjon av denne språkstrukturen x. (ii) uttrykker at Indv er en formeldannende konstruksjon på en term. (iii) uttrykker at –>, v, & og <–> er formeldannende konstruksjoner på to formler. (iv) uttrykker at ¬, Nec og Pos er formeldannende konstruksjoner på en formel. (v) uttrykker det faktum at A,E,A. og E. er formeldannende konstruksjoner på en variabel av type <d*,i> og en formel. Endelig uttrykker (vi) at = og ~ er formeldannende konstruksjoner på to termer. Betingelsene (vii) – (xx) setter så visse krav til intepretasjonsfunksjonen z når det gjelder de nevnte konstruksjonene. Som man ser er dette de vanlige semantiske valuasjons-reglene som man ville forvente. (xxi) innebærer at v er den funksjonen som til hvert naturlig tall n tilordner et variabeltegn av typen <d*,i>. v(n) er altså det n'te variabeltegnet av typen <d*,i>.

Vi nevner nå to teoremer som viser noen av de grunnleggende egenskapene til de konstruksjonene som ble nevnt i Definisjon 2.13:

Teorem 2.1 (T;A) Anta Q holder og at F,GêFm(x). Anta t,t1,t2êTm(x). Da har man at Val(S,<x,z>) om S er en eller annen av formlene på den følgende liste:

(i) (Av;j)Nec(F) <–> Nec((Av;j)F)
(ii) (A.v;j)Nec(F) <–> Nec((A.v;j)F)
(iii) (Ev;j)Pos(F) <–> Pos((Ev;j)F)
(iv) (E.v;j)Pos(F) <–> Pos((E.v;j)F)

Har man Fri;<x,z>(v;k,t,F) der têTm(x) gjelder Val(S,<x,z>) om S er den følgende formel:

(v) (Av;k)F –> F;(v;k)[t]

Har man Fri;<x,z>(v;j,v;r,F) og Fri;<x,z>(v;j,v;k,F) gjelder Val(S,<x,z>) om S er en av de følgende formler:

(vi) (A.v;j)F & Indv(v;r) –> F;(v;j)[v;r]

(vii) Indv(v;r) & F;(v;j)[v;r] –> (E.v;k)F;(v;j)[v;k]
(viii) v;k ~ v;r –>. F;(v;j)[v;k] <–> F;(v;j)[v;r]
(ix) Indv(v;j) & Indv(v;k) –>. v;j = v;k –> Nec(v;j = v;k)
(x) Indv(v;j) & Indv(v;k) –>. ¬(v;j = v;k) –> Nec(¬(v;j = v;k))
(xi) v;k ~v;r –> Nec(v;k = v;r)

Har man Fri;<x,z>(v;m,t1,F) og Fri;<x,z>(v;m,t2,F) gjelder Val(S,<x,z>) om S er en av de følgende formler:

(xii) t1 = t2 –>. F;(v;m)[t1] <–> F;(v;m)[t2]
(xiii) Indv(v;j) –> Nec(Indv(v;j))
(xiv) t1 ~t1
(xv) (A.v;j)F <–> (Av;j)(Indv(v;j) –>F)
(xvi) (E.v;j)F <–> (Ev;j)(Indv(v;j) & F)

Har man ¬Fr;<x,z>(v;j,t1) gjelder Val(S, <x,z>) om S er den følgende formel:

(xvii) Indv(t1) –> (Ev;j)(Indv(v;j) & Nec(v;j = t1)

Har man ¬Fr;<x,z>(v;j,F) jelder Val(S, <x,z>) om S er den følgende formel:

(xviii) (Av;j)(F–>G) –>. F –> (Av;j)G

Endelig har man at dersom Val(F,<x,z>) så gjelder også Val((Av;j)F, <x,z>)

I sammenheng med Teorem 2.1 er det også nærliggende å nevne det følgende teorem:

Teorem 2.2 (T;A) Anta Q og at F,G,H êFm(x). Da har man Val(S,<x,z>) om S er en eller annen av de følgende formler:

(i) F –> G –> (¬G –> ¬F)
(ii) F –>(G–>F)
(iii) (F–>(G–>H)) –> ((F–>G) –>(F –> H))
(iv) (F <–> G) –> (F –> G)
(v) (F <–> G) –> (G –> F)
(vi) (F–>G) –>((G–>F) –> (F<–>G))
(vii) FvG <–> ((¬F) –> G)
(viii) F&G <–> (¬((¬F)v(¬G)))
(ix) Nec(F) & Nec(F–>G) –> Nec(G)
(x) Nec(F) –> F
(xi) Pos(F) –> Nec(Pos(F))
(xii) Nec(F) <–> ¬Pos(¬F)
(xiii) Pos(F) <–> ¬Nec(¬F)
(xiv) (Ev;j)F <–> ¬(Av;j)¬F

Har man at Q og F,GêFm(x) gjelder også følgende:

(xv) Val(F,<x,z>) –> Val(Nec(F),<x,z>)
(xvi) Val(F,<x,z>) & Val(F–>G,<x,z>) –> Val(G,<x,z>)

Bevisene for Teorem 2.1 og Teorem 2.2 er av en rent rutinemessig natur. Vi skal ikke gi detaljerte bevis her. Det ville imidlertid være en god øvelse for leseren å bevise satsene på egenhånd.

I forbindelse med teoremene ovenfor skyter vi her inn noen bemerkninger om det vi vil kalle ekstensjonale predikater av grad n i et intensjonalt språk av orden w. Denne type predikater er definert ved:

Definisjon 2.13 x er et ekstensjonalt predikat av grad n i språket L, i symboler "EPred;n(x,L)" hvis og bare hvis man har:

(Ez)(Ey)(EX)(nêN & XêTypSeq & IntS;w(y) & Intepr;w(z,y) &
L=<y,z> & Lh(X)= n & xê(y);3(<<t,i>,ø,X,ø>) &
(Aj)(jêDom(X) –> X(j) = <d*,i>) & (Ef)(fê(2^I)^(D;*^n) &
(Aw)(Ax;1)...(Ax;n)(wêI & x;1,...,x;nê(D;*)^I –>.
z(x)(<x;1,...,x;n>)‘w=1 <–> f(<x;1(w),...,x;n(w)>)‘w =1))

Et predikat av grad n i det intensjonale språket L av orden w, vi bruker her "Pred;n(x,L)" som forkortelse er definert på den følgende måte:

Definisjon 2.14 Pred;n(x,L) <–>
(Ez)(Ey)(EX)(nêN & XêTypSeq & IntS;w(y) & Intepr;w(z,y) &
L=<y,z> & Lh(X)= n & xê(y);3(<<t,i>,ø,X,ø>) &
(Aj)(jêDom(X) –> X(j) = <d*,i>))

Et intensjonalt predikat av grad n i L er definert slik:

Definisjon 2.15 x er et intensjonalt predikat av grad n i språket L, i symboler "IntPred;n(x,L)" hvis og bare hvis:
Pred;n(x,L) & ¬EPred;n(x,L)

Det bør bemerkes at funksjoen f som er nevnt i Definisjon 2.13 er entydig bestemt. Dette innebærer at den følgende sats holder:

Teorem 2.3 Anta IntSw(y) & Intepr;w(z,y) & Pred;n(x,<y,z>) & nêN. Da gjelder:
EPred;n(x,L) <–> (E!f)(fê(2^I)^(D;*^n) &
(Aw)(Ax;1)...(Ax;n)(wêI & x;1,...,x;nê(D;*)^I –>.
z(x)(<x;1,...,x;n>)‘w=1 <–> f(<x;1(w),...,x;n(w)>)‘w =1))

Vi kan også bevise den følgende sats:

Teorem 2.4 Anta Q og at Pred;n(P,<x,z>). Da har man EPred;n(P,<,z>) hvis og bare hvis Val(S,<x,z>) der S er den følgende formel:
v;(r;1)= v;(k;1) &... & v;(r;n) = v;(k;n) –>
Pv;(r;1)....v;(r;n) <–> Pv;(k;1)....v;(k;n)

I forbindelse med de teoremene som så langt er nevnt er det også naturlig å ta opp enkelte sider ved det typeteoretiske attributthierarki av orden w. I denne forbindelse skal vi også si noe om hva som kan kalles attributt-abstraksjon og attributt-predikasjon.

"Q2" forkorter en temmelig komplisert betingelse i likhet med "Q". Vi gir den følgende definisjon:

Definisjon 2.16 "Q2" brukes som forkortelse for konjunksjonen av de følgende betingelser:

(i) IntS;w(x) & Intepr;w(z,x)
(ii) Func(X) & (At)(têT(A) –> X;t = (x);2(t))
(iii) Func(A) & Func(E) & Func(∂) & Func(Id) & Func(Pr)
(iv) Dom(A) = Dom(E) = Dom(∂) = Dom(Id) = Dom(Pr) = T(A)
(v) (At)(têT(A) –> A;t,E;t ê(x);3(<<t,i>,[t],[<t,i>],ø>))
(vi) (At)(têT(A) –> Id;t ê (x);3(<<t,i>,ø,[t,t],ø >))
(vii) (At)(têT(A) –> ∂;t ê (x);3(<<t,i>,t>,[t],[<t,i>],ø>))

(viii) (At)(têT(A) –> Pr;t ê(x);3(<t,i>,ø,[<<t,i>,t>,t],ø>))
(ix) (At)(Aw)(AX)(têT(A) & wêI & Xê ((2^I)^((2^I)^k(t))) –>
z(A;t)(X)‘w =1 <–> (Aa)(aêk(t) –> X(a)‘w =1))
(x) (At)(Aw)(AX)(têT(A) & wêI & Xê ((2^I)^((2^I)^k(t))) –>
z(E;t)(X)‘w =1 <–> (Ea)(aêk(t) & X(a)‘w =1))
(xi) (At)(Aw)(AX)(AY)(têT(A) & wêI & X,Yêk(t) –>
z(Id;t)(X,Y)‘w =1 <–> X=Y)
(xii) (At)(AX)(têT(A) & X ê((2^I)^k(t)). –> z(∂;t)(X) = X)
(xiii) (At)(AX)(Ay)(têT(A) & Xê((2^I)^k(t)) & yêk(t). –> z(Pr;t)(X,y) = X(y)).

Ved hjelp av denne definisjonen kan vi så formulere det følgende teorem:

Teorem 2.5 Anta Q&Q2 og at F,G êFm(x). Anta n,m,jêN og at têT(A).
(a) Vi har Val(S, <x,z>) om S er en av de følgende formler:
(i) (A;t X;t(n))F –> F;(X;t(n))[X;t(m)]
(ii) (A;t X;t(n))F <–> ¬(E;t X;t(n))¬F
(iii) (E;t X;t(n))F <–> ¬(A;t X;t(n))¬F
(iv) Nec((A;t X;t(n))F) <–> (A;t X;t(n))Nec(F)
(v) Pos((E;t X;t(n))F) <–> (E;t X;t(n))Pos(F)
(vi) Id;t(X;t(n), X;t(m)) –> Nec(Id;t(X;t(n), X;t(m)))
(vii) ¬Id;t(X;t(n), X;t(m)) –> Nec(¬Id;t(X;t(n), X;t(m)))
(b) Anta ¬(Fr(X;t(n),F). Da har man at Val(S,<x,z>) der S er den følgende formel:
(i) (A;t X;t(n))(F –> G) –>(F –> (A;t X;t(n))G)
(c) Anta Fri(X;t(j),X;t(n),F) og Fri(X;t(j),X;t(m),F) Da har man Val(S,<x,z>) om S er den følgende formel:
(i) Id;t(X;t(n), X;t(m)) –>. F;(X;t(j))[X;t(n)] <–> F;(X;t(j))[X;t(m)])
(ii) Pr;t((∂;t X;t(j))F, X;t(n)) <–> F;(X;t(j))[X;t(n)]
(d) Anta s=<<t,i>,t>. Da har man at Val(S,<x,z>) der S er en av de følgende formler:
(i) (A;s X;s(n))F –> F;(X;s(n))[(∂;t X;t(j))G]
(ii) F;(X;s(n))[(∂;t X;t(j))G] –> (E;s X;s(n))F
(e) Anta s = <<t,i>,t> og ¬Fr(X;s(j),F). Da har man at Val(S,<x,z>) der S er den følgende formel:
(i) (E;s X;s(j)) [(A;t X;t(n))(Pr;t(X;s(j) X;t(n)) <–> F)]
(f) Man har at hvis Val(F,<x,z>) så gjelder Val((A;t X;t(n))F, <x,z>).

Beviset for Teorem 2.5 er av en rutinemessig karakter. Det vil derfor ikke bli gitt her. Enkelte bemerkninger kan være på plass i forbindelse med denne satsen: Vi har ovenfor forutsatt at språket x inneholder en ∂-abstraksjonsoperator ∂;t for hver type t. Denne konstruksjonen er en konstruksjon som til enhver formel F og en hver variabel X;t(n) danner et uttrykk (∂;t X;t(n))F av type <<t,i>,t>.
"(∂;t X;t(n))F " betegner attributtet å være et attributt X;t(n) som oppfyller formelen F. Det er altså et attributt på et høyere nivå en t. Er nå X;t(m) et attributt av type t som har egenskapen (∂;t X;t(n))F er det klart at X;t(m) bør tilfredstille formelen F, med andre ord skulle det være klart at man bør ha
F;(X;t n)[X;t(m)]. For å kunne uttrykke at et attributt X;t(n) har en egenskap eller et attributt X;s(m) (der s= <<t,i>,t>) har vi innført et eget predikajonspredikat Pr;t for hver type têT(A). Dette predikatet har naturligvis en lignende status innenfor den nærværende teori som ê-predikatet har innenfor den enkle typeteori. Pr;t er en formeldannende

konstruksjon på en sekvens av to uttrykk [u;1,u;2] der U;1ê(x);4(<<t,i>,t>) og u;2ê(x);4(t). Man kan lese "Pr;t(X;s(j), X;t(n))" slik: "Attributtet X;s(j) er et attributt ved X;t(n)".

I forbindelse med de temaer som er tatt opp så langt er det også naturlig å se på visse substitusjonsteoremer som i det vesentlige sier at substitusjon av synonyme uttrykk gir som resultat synonymer:

Teorem 2.6 Anta Q & Q2 & F,Gê((x);4(t)) & têT(A). Anta videre at m,nêN & HêFm(x) &Fri(X;t(n),F,H) & Fri(X;t(n),G,H). Da har man at Val(S,<x,z>) om S er den følgende formel:

Id;t(F,G) –> (H;(X;t(n))[F] <–> H;(X;t(n))[G]

Dette teoremet er imidlertid forholdsvis spesielt. Man kan også bevise mer generelle teoremer av samme type. For å kunne gjøre dette gir vi den følgede definisjon:

Definisjon 2.17 "Q3" brukes som forkortelse for konjunksjonen av de følgende betingelser:

(i) IntS;w(x) & Intepr;w(z,x>
(ii) Func(Ekv) & Dom(Ekv) = T
(iii) (At)(têT –> Ekv;t ê(X);3(<<t,i>,ø,[t,t],ø>))
(iv) Func(A) & Dom(A) = T
(v) (At)(têT –> A;t ê(x);3(<<t,i>,[t],[<t,i>],ø>)
(vi) –> ê (x);3(<<t,i>,ø, [<t,i>,<t,i>],ø>)
(vii) (At)(Aw)(AX)(AY)(têT &wêI & X,Yêk(t) –>
(z(Ekv;t)(X,Y)‘w =1 <–> X=Y))
(viii) (At)(Aw)(AX)(têT & wêI & Xê((2^I)^((2^I)^k(t))) –>
(z(A;t)(X)‘w =1 <–> (Aa)(aêk(t) –> X(a)‘w = 1)))
(ix) (At)(têT & wêI & X,Yê(2^I). –>
(z(–>)(X,Y)‘w =1 <–> (X(w)=1 <–> Y(w)=1)))

Vi kan nå formulere det følgende substitusjonsteorem:

Teorem 2.7 Anta Q3 og s,têT. Anta Hê(x);4(s) og at F,Gê(x);4(t). Anta dessuten:

(i) Func(X) & Dom(X)=T
(ii) (At)(têT –> X;t = ((x);2(t))
(iii) nêN
(iv) Fri(X;t(n),F,H) & Fri(X;t(n), G,H)

Under disse forutsetningene gjelder at Val(S,<x,z>) om S er den følgende formel:

Ekv;t(F,G) –> Eksv;s(H;(X;t(n))[F] , H;(X;t(n))[G])

Definisjon 2.18 "Q4" brukes som forkortelse for konjunksjonen av de følgende betingelser:

(i) & ê(x);3(<<t,i>,ø, [<t,i>,<t,i>],ø>)
(ii) (AX)(AY)(Aw)(wêI & X,Yê(2^I) –>
(z(&)(X,Y)‘w =1 <–> X(w)=Y(w)=1))

Gitt denne definisjonen kan man nå formulere det følgende, temmelig generelle, substitusjonsteorem:

Teorem 2.8 Anta Q3 & Q4. Anta videre at de følgende betingelser er oppfylt:

(i) Func(X) & Dom(X)= T
(ii) (At)(têT –> X;t = ((x);2(t))
(iii) i= <t,f,g,h>êKonIndex
(iv) lh(f)=m & lh(g) = n & lh(h) =k)
(v) (Aj)(1≤j≤n –> F;j,G;jê((x);4(g(j))))
(vi) (Aj)(1≤j≤k –> H;j,D;jê((x);4(h(j))))
(vii) (Aj)(1≤j≤m –> X;f(j)(s(j)) êRgn((x);2(f(j))))
(viii) (Aj)(Ar)(1≤j≠k≤m –> X;f(j)(s(j)) ≠ X;f(k)(s(k)))
(ix) *f*ê((x);3(i))

Gitt disse betingelsene gjelder det at Val(S,<x,z>) der S er den følgende formel:

Konj/p,1,n/((A;f(1) X;f(1)(s(1)))....(A;f(m) X;f(m)(s(m)))(Ekv;g(p)(F;p,G;p))) &
Konj/p,1,n/((A;f(1) X;f(1)(s(1)))....(A;f(m) X;f(m)(s(m)))(Ekv;h(p)(H;p,D;p)))
–>.
Ekv;i(*f*(X;f(1)(s(1)),...,X;f(m)(s(m)), F;1,...,F;n, H;1,...,H;k),
f(X;f(1)(s(1)),...,X;f(m)(s(m)), G;1,...,G;n, D;1,...,D;k))

La oss i forbindelse med dette teoremet bemerke at "Konj/i,1,r/(L;i)" brukes til å betegne konjunksjonen av de diverse formlene L;1,....,L;r. Dette innebærer at "Konj/i,1,r/(L;i)" betegner L;1&.....&L;n.

Vi skal ikke gi beviset for Teorem 2.8 her. Grunnen er at beviset om det skal gjennomføres detaljert er langtekkelig. I tillegg er beviset av en rutinemessig karakter.

§3 Ultraintensjonale objekter.

Definisjonene som er nevnt i §1 – §2 er ment primært som et tillegg til T;A, men de kan i prinsippet legges til alle våre teorier uten noen forandringer. Det bør bemerkes at vi ikke eksplisitt har nevnt den følgende formel, som man kanskje kunne tenke seg å legge til som et nytt ikke-logisk aksiom til T;A – T;D:

(+) IntS;w(x) & Intepr;w(z,x) –> Språk(<x,z>)

Denne formelen passer imidlertid ikke så godt sammen med T;A* – T;D*.

Den avgjørende forskjellen mellom T;A – T;D på den ene side og T;A* – T;D* på den annen side er at språkene til de sistnevnte teorier inneholder predikatet "x er en verden ", – "W(x)" –, i tillegg til predikatet "x er en logisk mulig verden". Man kan altså i disse teoriene uttrykke påstander om verdener som ikke er logisk mulige verdener. La oss sette W = Mg(x: W(x)). Da har man I Inkl W. Er W–I≠ø finnes det verdener som ikke er logisk mulige. Denne type verdener vil her bli omtalt som unormale verdener. Det som intuitivt sett er karakteristisk ved d unormale verdenene er at de vanlige logiske lovene ikke nødvendigvis behøver å holde i dem. Dette innebærer at de logiske konnektivene kan få en annen intepretasjon i disse verdenene enn i logisk mulige verdener. I en unormal verden er det i og for seg intet som forhindrer at f.eks. en setning av typen "F&¬F" kan være sann. Man bør i denne sammenheng studere de sameatiske aksiomene i T;A* – T;D*. Den første som introduserte unormale verdener i studiet av modallogikk synes å ha vært Kripke i forbindelse med utarbeidelsen av semantiske teorier for Lewis-systemene S2 og S3. Vi henviser i denne forbindelse til Kripke [2].

§3.1 Hierarkier av ultraintensjonale objekter.

Vi skal nå først, i analogi med Definisjon1.2 i §1 definere hva vi vil forstå ved det ultraintensjonale typeteoretiske hierarki av orden w. I det følgende betegner "T", på samme måte som tidligere, klassen av typer. Vi definerer en type-tilordner æ ved den følgende definisjon:

Definisjon 3.1.1
(i) æ(d) = D
(ii) æ(i) = W
(iii) æ(d*) = DU{*}
(iv) æ(t) = {0,1}
(v) Er x;1,....,x;nêT er æ([x1,....,x;n]) = Prod/i,1,n/(æ(x;i))
(vi) Er x,yêT så er æ(<x,y>) = æ(x)^æ(y)

Strukturen <æ(t)>/têT/ er da nøyaktig det vi nå vil kalle for det ultraintensjonale typeteoretiske hierarki av orden w.

For å fastlegge vår terminologi i det følgende gir vi også den følgende definisjon som er analog med Definisjon 1.2.1 i §1.2 i dette kapitlet:

Definisjon 3.1.2 Anta A er en eller annen ikke-tom mengde og at det samme gjelder B. Da sier vi at

(i) x er et monadisk ultraintensjonalt attributt over A hvis og bare hvis xê((2^W)^A)
(ii) x er en n-ær ultraintensjonal relasjon over A hvis og bare hvis xê((2^W)^(A^n))
(iii) x er et ultraindividuelt begrep over A hvis og bare hvis xê(A^W)
(iv) x er en n-ær ultraintensjonal funksjon over A hvis og bare hvis xê((A^W)^(A^n))
(v) x er en n-ær ultraintensjonal funksjon fra A over i B hvis og bare hvis xê((B^W)^(A^n))
(vi) x er et ultraattributt hvis og bare hvis xê((2^W)^D;*
(vii) x er en n-ær ultraintensjonal relasjon hvis og bare hvis xê((2^W)^((D;*)^n))
(viii) x er et ultraindividuelt begrep hvis og bare hvis xê((D;*)^W)
(vix) x er en n-ær ultraintensjonal funksjon hvis og bare hvis xê(((D;*)^W)^((D;*)^n))

På samme måte som vi i §1.2 fastla vår bruk av ordet "utsagn" gir vi nå følgende definisjon av "ultrautsagn":

Definisjon 3.1.2 Vi sier at x er et ultrautsagn hvis og bare hvis xê(2^W)

La oss nå beskrive et litt annet hierarki enn det ultraintensjonale typeteoretiske hierarki av orde w. Det nye hierarkiet vil bli kalt for det kumulative ultraintensjonale hierarkiet.

Først betrakter vi de følgende operasjoner:

(1) b1(n) = ∂X((2^W)^(X^n))
b2(n) = ∂X((X^W)^(X^n))

b1(n) er altså den funksjonen som til enhver mengde X tilordner denne klassen av n-ære ultraintensjnale relasjoner over mengden X. b2(n) er den funksjonen som tilordner enhver

mengde X klassen av n-ære ultraintensjonale funksjoner over X. (n≥0) Dernest kan vi betrakte funksjonen D;U definert ved:

(2) D;U(X) = UN/nêN/(b1(n)(X)) U UN/nêN/(b2(n)(X))

D;U tilordner altså enhver mengde X unionen av klassen av alle ultrainten-sjonale relasjoner over X og klassen av alle ultraintensjonale funksjoner over X. Merk at vi per konvensjon har at b1(0)(X) = 2^W og at b2(0)(X) = X^W. b1(0)(X) er altså klassen av ultrautsagn og b2(0)(X) er klassen av ultraindividuelle begreper over X.

Man kan nå ved hjelp av operasjonen D;U definere det følgende hierarki. Definisjonen er ved transfinit induksjon:

Definisjon 3.1.3

(i) H;U(0) = D;*
(ii) H;U(a+1) = H;U(a)U D;U(H(a)) om aêOn
(iii) H;U(a) = UN/b<a/(H;U(b)) om aêK;II.

Vi setter In = <H(a)>/aêOn/, der "H(a)" er definert som i §1.2. Videre setter vi per definisjon In;U = <H;U(a)>/aêOn/. In;U er da det vi her vil kalle for det kumulative ultraintensjonale hierarki. Det intensjonale og det ultraintensjonale hierarki representerer det intuitive begrep om henholdvis intensjonale og ultraintensjonale objekter som har blitt lagt til grunn i denne avhandlingen på samme måte som det ekstensjonale kumulative mengdehierarki har representert det mengdebegrep vi har arbeidet med.

§4 En avbildning av In inn i In:U

In og In;U er nært forbundet med hverandre i det ethvert intensjonalt objekt kan identifiseres med et tilsvarende ultraintensjonalt objekt på en nokså naturlig måte. Dette innebærer at vi i en viss forstand kan bruke visse ultraintensjonale objekter som representanter for tilsvarende intensjonale objekter. Eksempelvis kan et vilkårlig utsagn xê(2^I) identifiseres med en funksjon x*ê(2^W) der x* er definert ved at x*(w)=x(w) om wêI og x*(w)=0 om xê(W–I).

Vi skal nå generalisere dette og definere induktivt, for hvert aêOn, en avbildning g;a: H(a) –(1-1) –> H;U(a).

Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 4.1

(a) Vi setter g;0(x) = x om xêH;(0)= D;*.

(b) Anta g;a er definert og at g;a : H(a) –(1-1)–> H;U(a). Vi skal definere g;(a+1). Er xêH(a+1) er det to muligheter: Tilfelle 1: xêH(a). I så fall setter man g;(a+1) = g;a. Tilfelle 2: xê(H(a+1)–H(a). Dette innebærer at xêD(H(a)). I sin tur impliserer dette at xê(2^I)^((H(a)^n) eller at xê((H(a))^I)^((H(a)^n). Igjen sondrer vi mellom to tilfelle: Tilfelle 2.1 xê(2^I)^((H(a)^n). Vi ønsker i dette tilfellet at g;(a+1)(x)ê((2^I)^c) der c= (H;U(a))^n. Betrakt yê(H;U(a))^n. Det er da tre muligheter:

Tilfelle 2.1.1 yê (g;a"H(a))^n og wêI. I så fall setter vi:
(g;(a+1)(x))(y)‘w = x(<(g;a);-1((y);1),...., (g;a);-1((y);n>)‘w

Tilfelle 2.1.2 yê (g;a"H(a))^n og wê(W–I). Da setter vi:
(g;(a+1)(x))(y)‘w = 0

Tilfelle 2.1.3 yê (H;U(a))^n – (g;a"H(a))^n og wêW. Da setter vi også:
(g;(a+1)(x))(y)‘w = 0

Tilfelle 2.2 xê((H(a))^I)^((H(a)^n). Vi ønsker i dette tilfellet at g;(a+1)(x)ê((H;U(a)^I)^c) der c= (H;U(a))^n. Betrakt yê(H;U(a))^n. Det er da igjen tre muligheter:

Tilfelle 2.1.1 yê (g;a"H(a))^n og wêI. I så fall setter vi:

(g;(a+1)(x))(y)‘w = g;a[x(<(g;a);-1((y);1),...., (g;a);-1((y);n>)‘w]

Tilfelle 2.1.2 yê (g;a"H(a))^n og wê(W–I). Da setter vi:

(g;(a+1)(x))(y)‘w = *

Tilfelle 2.1.3 yê (H;U(a))^n – (g;a"H(a))^n og wêW. Da setter vi også:

(g;(a+1)(x))(y)‘w = *

Dermed er g;(a+1) gitt at g;a er definert på forhånd.

(c) Er aêK;II, dvs. er a et limesordinal setter vi: g;a = UN/b<a/(g;b).

Det er nå en i prinsippet enkel sak å bevise:

Teorem 4.1 (Aa)(aêOn –> g;a: H(a) –(1-1)–> H;U(a))

La oss også bemerke at vi har In = In;U om I =W. Dette innebærer altså at de to hierarkiene faller sammen om det ikke finnes noe unormale verdener.

§5 Generalisering av logikken for intensjonale språk av orden w.

Det er mulig å abstrahere fra begrepene som ble innført i §2 et mer generelt begrepsett. La oss kalle enhver ikke-tom mengde X for en potensiell typestruktur. Da er klassen av typesekvenser over X, TypSeq;X, definert som i §2, unntatt ved at "T" i definiens nå er erstattet med "X". Videre er klassen av konstruksjonsindekser over X, KonIndex;X, også definert som i §2. Vi erstatter bare "TypSeq" i definiens med "TypSeq;X". Vi definerer et abstrakt intensjonalt språk L over typestrukturen X, i symboler "IntS;X(L)" som ved Definisjon 2.1 i §2, men erstatter "KonIndex" i definiens overalt med "KonIndex;X".

Med en typetilordner over X forstås nå en funksjon q der Dom(q) = X og q(z) er en ikke-tom mengde for alle zêX. Med et type-system forstås et ordnet par <X,q> der X er en potensiell typestruktur og q en typetilordner over X.

Vi definerer "z er en intepretasjon av den intensjonale språkstrukturen L assosiert med typestrukturen <X,q>" – dette predikatet forkortes med "Intepr;<X,q>(z.L)" – nøyaktig som ved Definisjon 2.2 i §2, men erstatter i definiens "IntS;w(L)" med "IntS;<X,q>(L)" og overalt "KonIndex" med "KonIndex;X" og "k" med "q".

Også verditilordningsbegrepet som vi innførte kan nå relativiseres til vilkårlige type-systemer.

Vi definerer uttrykket "x er en verditilordning for den intensjonale språkstrukturen L assosiert med typesystemet <X,q>", "Vt;<X,q>(x,L)" som i Definisjon 2.3 i §2, men føyer bare til klausulen "IntS;<X,q>(L)" i definiens og erstatter "k" overalt med "q". På tilsvarende måte defineres ∏;<X,q>(v,L,Z) som i Definisjon 2.4, men vi må gjøre de følgende forandriger idefiniens: "IntS;w(L)" erstattes med "IntS;<X,q>(L)", "Intepr;w(Z,L)" erstattes med "Intepr;<X,q>(Z,L)", "Vt;w(v,L)" erstattes med "Vt;<X,q>(v,L)". Videre må "KonIndex" overalt erstattes med "KonIndex;X" og "k" erstattes med "q".

Resulatet av disse modifikasjonene er at vi nå har for oss en helt generell typeteori. Det bør også bemerkes at de begrepene vi har innført i dette avsnittet er rent mengdeteoretiske. Definiens i de definisjonene som nå har blitt spesifisert kan ekspanderes til betingelser som er formulert i L;ê. Dette innebærer at man kan oppfatte denne generelle typeteorien som et tillegg til alle våre teorier T;A – T;D*.

§5.1 Andre type-systemer og høyere ordens språk.

I §1 og §2 arbeidet vi med typesystemet <T,k> der T og k ble definert ved henholdsvis Definisjon 1.1 og Definisjon 1.2 i §1. I stedet for å betrakte <T,k> kan man nå betrakte typesystemet <T,æ> og sette:

P = Mg(<L,Z>: IntS;<T,æ>(L) & Intepr;<T,æ>(Z,L))

Man legger merke til at dette er en ny type språk som man i prinsippet kan innlede et mer eller mindre dyptgående studium av. Disse språkene kalles ultraintensjonale formale språk av orden w. Som man ser har ethvert slikt språk en syntaktisk førstekomponent som er et abstrakt intensjonalt språk L over typestrukturen <T,æ>. Den andre komponenten er en meningstilordner eller hva man også kunne kalle for en intepretasjonsfunksjon. Man kan utlede satser om denne typen språk som er helt analoge med Teorem 2.1 – Teorem 2.8 i §2. Imidlertid vil dette ikke bli gjort her siden vi bare har satt oss fore å gi en oversikt over begrepsdannelser som det etter vår mening kan være av interesse å studere i forbindelse med teoriene T;A – T;D*. Detaljerte undersøkelser og presentasjon av tekniske resultater må derfor utsettes til eventuelle senere arbeider.

Vi bemerker imidlertid at det skulle være mulig å visse en rekke satser om oversettelse som forbinder språkene i mengden

J = Mg(<L,Z>: IntS;w(L) & Intepr;w(Z,L))

med dem i mengden P. For eksempel skulle det trolig være mulig å vise at man til ethvert språk <L1, Z1>êJ skulle finne et tilsvarende språk <L2, Z2> i mengden P slik at

(1) Fm(L1) = Fm(L2) og der man har:
(2) Dersom Vt;w(v1, L1) & Vt;<T,æ>(v2,L2) så holder:
∏(v1,L2,Z1)(F) = Rest((∏;<T,æ>(v2,L2,Z2))(F),I) om FêCFm(L1).

Det virker også rimelig å tro at språkene i P i en viss betydning rommer uttrykksmuligheter som man ikke råder over i språkene som hører med i klassen J.

La oss som avslutning på denne paragrafen gi en del andre eksempler på klasser av høyere ordens formale språk.

Definer først en potensiell typestruktur s;a for hver aêOn ved å sette at s;a = aU{-1}. Definer så en typetilordner h;a for alle aêOn ved:

h;a(x) = H(x) om xêa og h;a(-1) = (2^I)

Gitt disse definisjonene vil <s;a, h;a> være et type-system for alle aêOn og

LT;a = Mg(<L,Z>: IntS;<s;a,h:a>(L) & Intepr;<s;a,h;a>(Z,L))

vil være en familie av språk som kan brukes til å beskrive hierarkiet <H(x)>/x<a/.

På tilsvarende måte kan man definere en type-tilordner hu;a over s;a ved å sette :

hu;a(x) = H;U(x) om xêa og hu;a(-1) = (2^W)

Gitt disse definisjonene vil <s;a, hu;a> være et type-system for alle aêOn og

LTu;a = Mg(<L,Z>: IntS;<s;a,hu;a>(L) & Intepr;<s;a,hu;a>(Z,L))

vil være en familie av språk som kan brukes til å beskrive hierarkiet <H;U(x)>/x<a/.

Tilslutt nevner vi at det er mulig å identifisere LT;a-språkene med en viss delmengde X Inkl LTu;a. At dette skulle være tilfelle skulle fremgå om man betrakter avbildningen g;a som vi definerte i §4.

§6 Skisse til en attributt-teori basert på det rene kumulative attributthierarki.

I dette avsnittet skal vi bare skissere en bestemt attributtteori som vi finner interessant. Det bør understrekes at vår fremstilling her har preg av et resymé. I et senere arbeid vil vi gi en detaljert begrunnelse for de påstandene som fremsettes her og som på det nåværende stadium har preg av gjetninger. Vi vil derfor ikke bli overasket om vi senere finner å måtte foreta visse forandringer og modifikasjoner.

Vi definerte §1.4 i dette kapitlet det rene kumulative attributthierarki <Ac(a,ø)>/aêOn/. Den teorien som å presenteres kan oppfattes som et forsøk på å kodifisere denne strukturen. La oss først definere:

i;m = μx(x êNc & Inacc(x))

Her er Nc klassen av alle kardinaltall. Nc er definert på samme måte som i Takeuti &Zaring [1]. "Inacc(x)" betyr at x er et utilgjengelig kardinaltall. "Inacc(x)" defineres her på samme måte som i Takeuti & Zaring[1], DefTZ 10.66. I det følgende skal vi arbeide innenfor rammen av L;A og dessuten forutsette at den følgende formel er lagt til aksiomene i T;A som et nytt ikke-logisk aksiom:

Kum1 Ac(i;m,ø) Inkl D

Aksiomet sier at mengden av alle elementene i det rene kumulative hierarki av attributter opp til det første utilgjengelige kardinaltall er mulige individer. Fra Kum1 følger uten videre eksistensen av utilgjengelige kardinaltall. Kum1 representerer derfor en forholdsvis sterk mengdeteoretisk hypotese. Det virker dog rimelig å tro at T;A utvidet med Kum1 er ekvikonsistent med ZFC utvidet med et tilsvarende aksiom som sier at det finnes utilgjengelige kardinaltall. Det synes heller ikke som om man så langt har oppdaget noen spesielle grunner som taler til fordel for at det sistnevnte system er inkonsistent. Det bør bemerkes at alle våre satser i det følgende påstas å være teoremer i T;A[Kum1].

Vi skal innføre to nokså kompliserte betingelser som vi ønsker å forkorte med "A" og "B".

Definisjon 6.1"A" brukes som forkortelse for konjunksjonen av de følgende betingelser:

(i) FORM(L)
(ii) {ê, =} = P;<0,2,0>((L);1)
(iii) {¬, Nec, Pos} = P;<0,0,1>((L);1)
(iv) {∂} = C;<1,0,1>((L);1)
(v) {At} = P;<0,1,0>((L);1)
(vi) {A,E} = P;<1,0,1>((L);1)
(vii) {&, v, –>, <–>} = P;<0,0,2>((L);1)
(viii) (Am)(An)(Ak)(m,n,kêN & ¬(<m,n,k>ê{<0,2,0>, <0,0,1>, <1,0,1>, <0,1,0>, <0,2,0>}) –> P;<m,n,k>((L);1) =ø)
(ix) (Am)(An)(Ak)(m,n,kêN & <m,n,k>≠<1,0,1> –> C;<m,n,k>((L);1) =ø)

Vi innfører så den andre betingelsen ved denne definisjonen:

Definisjon 6.2"B" brukes som forkortelse for konjunksjonen av de følgende betingelser:

(i) (Ax)(xêD;* & wêI –> [((L);2(At))(x)‘w =1 <–> xê(Ac(i;m,ø))])
(ii) (Aw)(Ax)(Ay)(wêI & x,yêD;* –>. ((L);2(ê))(x,y)‘w =1 <–> xêy(w))

(iii) (Aw)(AX)(wêI & Xê((2^I)^D) –>.
Mg(<w,Mg(y: X(y)‘w=1 & yêD)>: wêI)êAc(i;m,ø) –>
((L);2(∂)(X)‘w = Mg(<w,Mg(y: X(y)‘w=1)>: wêI))

(iv) (Aw)(AX)(wêI & Xê((2^I)^D) –>.
¬(Mg(<w,Mg(y: X(y)‘w=1 & yêD)>: wêI)êAc(i;m,ø)) –>
((L);2(∂)(X)‘w = *)

(v) (Aw)(Ax)(Ay)(wêI & x,yêD;* –> ((L);2(=)(x,y)‘w =1 <–> x=y))

(vi) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I) –>
((L);2(Nec)(X)‘w =1 <–> (Au)(uêI –> X(u)=1))

(vii) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I) –>
((L);2(Nec)(X)‘w =1 <–> (Eu)(uêI & X(u)=1))

(viii) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I) –>
((L);2(¬)(X)‘w =1 <–> X(u)=0))

(ix) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I)^D –>.
((L);2)(A)(X)‘w =1 <–> (Aa)(aêD –> X(a)‘w=1))

(x) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I)^D –>.
((L);2)(E)(X)‘w =1 <–> (Ea)(aêD & X(a)‘w=1))

(xi) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I) –>
((L);2)(–>)(X,Y)‘w =1 <–> (X(w)=1 –> Y(w)=1))

(xii) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I) –>
((L);2)(<–>)(X,Y)‘w =1 <–> (X(w)=1 <–> Y(w)=1))

(xiii) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I) –>
((L);2)(v)(X,Y)‘w =1 <–> (X(w)=1 v Y(w)=1))

(xiv) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I) –>
((L);2)(&)(X,Y)‘w =1 <–> (X(w)=1 & Y(w)=1))

I det følgende skal vi forutsette at [L,ê, =, ¬, &, v, –>, <–>, Nec, Pos, A, E, ∂, At] er en helt fiksert sekvens av objekter som oppfyller de to betingelsene A og B.

På dette punkt minner vi om den følgende definisjon som kan brukes i forbindelse med formale språk:

Definisjon 6.3
(a) ValF,w,v,L) <–> Sann(F,L,w,v)
(b) Val(F,w,L) <–> (Av)(Vt(v,(L);1) –> True(F,w,v,L))
(c) Val(F,L) <–> (Aw)(wêI –> True(F,w,L)

Den er identisk med Definisjon 3.20 i Kapittel III.

Den oppgaven vi nå vil stille oss kan sies å være å finne tilstrekkelig interessante og sterke sterke aksiomatiske systemer ∑ der teoremene i ∑ utgjør interessante delmengder av mengden av alle de formler som er gyldige i L om A og B forutsettes å holde.

Er F en formel på den følgende liste over formler og skjemata i L har man faktisk at Val(F,L) om man forutsetter A og B. Ser man derfor på det systemet som har formlene på denne listen som aksiomer og hvor slutningsregelene er modus ponens, universell generalisering og regelen "Er F et teorem er Nec(F) også et teorem" representerer dette et system av den typen som ble nevnt rett ovenfor.

Her følger listen med formler:

TA1 Nec(F) & Nec(F–> G) –> Nec(G)
TA2 Pos(F) –> Nec(Pos(F))
TA3 Nec(F) –> Nec(Nec(F))
TA4 Nec(F) –> F

TA5 (Ax)Nec(F) <–> Nec(AxF)
TA6 Nec(F) <–> ¬Pos(¬F)
TA7 x=y –> Nec(x=y)
TA8 ¬(x=y) –> Nec(¬(x=y))
TA9 At(y) –> Nec(At(y))
TA10 xêy –> At(y)
TA11 At(y) &xêy –> At(x)
TA12 ¬At(y) –> Nec(¬At(y))
TA13 At(y) & At(z) & Nec((Ax)(xêy <–> xêz)) –> y=z
TA14 At(∂x(F(x))) –> (yê∂x(F(x)) <–> F(y))
TA15 y= ∂x(F(x)) –> Nec(y= ∂x(F(x)))
TA16 At(y) –> [Nec((Ax)(xêy <–> F(x))) <–> y=∂x(F(x))]
TA17 At(y) –> (Ez)(At(z) & (Ax)(xêz –> Nec(xêz)) &
(Ax)(¬(xêz) –> Nec(¬(xêz)) & (Aw)(wêz <–> wêy))
TA18 At(∂x(F(x))) –> (Ey)(y= ∂x(F(x)))
TA19 At(z) –> At(∂x(xêz & F(z)))
TA20 At(z) –> At(∂x(¬(x=x)))
TA21 At(z) & At(w) –> At(∂x(x=z v x=w))
TA22 At(w) –> At(∂x(At(x) & Nec((Az)(zêx –> zêw))))
TA23 At(z) –> At(∂x((Ew)(xêw & wêz)))
TA24 (Ew)(At(w) & Nec(∂x(¬(x=x))êw & (Ay)(yêw & At(y) –>
(Ez)(At(z) & zêw & (Au)(uêz <–> uêy v u=y)))))
TA25 At(x) &(Ey)(yêx) –> (Ez)(zêx & ¬(Ew)(wêz & wêx))
TA26 [At(a) & (Ax)(Ay)(F(x,y) –> At(x)& At(y)) &
(Ax)(Ay)(Az)(F(z,x) & F(z,y) –> x=y)]–>
(Eb)(At(b) & (Ax)(xêb <–> (Ey)(yêa & F(y,x)))
TA27 [At(a) & (Ax)(Ay)(F(x,y) –> At(x)& At(y)) &
(Ax)(Ay)(Az)(F(z,x) & F(z,y) –> x=y) &
(Ax)(Ay)(Nec(F(x,y)) v Nec(F(x,y)))] –>
(Eb)(At(b) & Nec((Ax)(xêb <–> (Ey)(yêa & F(y,x)))))
TA28 [A(z) & (Ax)(xêz –>
(Ew)(wêz &(Ay)(yêz –> (y=x v ¬(Ew)(wêx & wêy)))))] –>
(Eu)(At(u) & (Ax)(Ev)(xêz <–> (As)(sêu & sêx <–> s=v)))

Ovenfor nevnte vi slutningsreglene modus ponens, universell generalisering og regelen "Er F et teorem er også Nec(F) et teorem". La oss formulere disse reglene litt mer eksplisitt. Bruker vi "Th(F)" som forkortelse for "F er et teorem" kan reglene formuleres slik:

R1 Th(F) & Th(F–>G) –> Th(G)
R2 Th(F) –> Th((Ax)F)
R3 Th(F) –> Th(Nec(F)

om F,G er vilkårlige formler i språket L og x er et vilkårlig variabeltegn.

Vi kan nå definere systemet MZFC – den attributt-teoretiske versjonen av ZFC – ved å si at dette er den minste formelmengden i L som (i) inkluderer et vanlig standard aksiom sett for de setningslogiske konnektivene, kvantorene og identitetspredikatet, (ii) Alle instanser av aksiomene TA1 – TA28 som ble listet opp ovenfor og som (iii) er lukket under slutningsreglene R1 – R3.

Ser man nærmere på listen TA1 – TA28 ser man at de fem første aksiomene representerer et standard aksiomsett for modalsystemet S5 med Barcanformelen inkludert.

Videre ser man at TA13 tilsvarer ekstensjonalitetsaksiomet i ZFC, TA19 tilsvarer utsondringsaksiomet, TA20 svarer til nullmengdeaksiomet. Videre har man at TA21 – TA24 svarer til henholdsvis parmengdeaksiomet, potensmengdeaksiomet, foreningsmengde-aksiomet og uendelighetsaksiomet i ZFC og at TA25 svarer til fundierungs-aksiomet, TA26 og TA27 er to versjoner av replacementaksiomet og endelig at TA28 er en formel som svarer til utvalgsaksiomet i ZFC.

Som tidligere antydet påstår vi nå at alle teoremene i MZFC er gyldige formler i det formale språket L. Et detaljert bevis for dette krever imidlertid en omhyggelig sjekking av en lang rekke punkter. Det som kanskje er minst opplagt er at våre versjoner av replacementaksiomet er gyldige i L. Men jeg tror det skulle være nokså likefrem å etablere dette.

§6.1 Endel begrepsdannelser og teoremer i MZFC

I denne paragrafen skal vi bare gjøre rede for en del punkter som kan gi en et litt klarere bilde av teorien MZFC. Først gis den følgende definisjon av en rekke begreper som det er nødvendig å ha til disposisjon for den videre utvikling av MZFC:

Definisjon 6.1.1

(a) $Rel(x) \leftrightarrow At(x) \& (Ay)(y\hat{e}x \rightarrow (Ez)(Ew)(y = \langle z,w\rangle))$
(b) $\langle z,w\rangle = \{\{z\},\{z,w\}\}$
(c) $\{z\} = \partial x(x=z)$
(d) $\{z,w\} = \partial x(x=z \vee x=w)$
(e) $\emptyset = \partial x(x\neq x)$
(f) $x \text{ Inkl } y \leftrightarrow Nec((Az)(z\hat{e}x \rightarrow z\hat{e}y))$
(g) $Pt(x) = \partial x(At(x) \& x \text{ Inkl } y)$
(h) $UN(x) = \partial z((Ey)(z\hat{e}y \& y\hat{e}z))$
(i) $SN(x) = \partial z((Ay)(y\hat{e}x \rightarrow z\hat{e}y))$
(j) $xUy = UN\{x,y\}$
(k) $x\Omega y = SN\{x,y\}$
(l) $Dom(z) = \partial x((Ey)(\langle x,y\rangle\hat{e}z))$
(m) $Rgn(z) = \partial x((Ey)(\langle y,x\rangle\hat{e}z))$
(n) $Rest(z,y) = \partial u(u\hat{e}z \& (Ex)(Ew)(u=\langle x,w\rangle \& x\hat{e}y))$
(o) $z;\text{-}1 = \partial u((Ex)(Ey)(u = \langle x,y\rangle \& \langle y,x\rangle\hat{e}z))$
(p) $r''z = \partial y((Ex)(x\hat{e}z \& \langle x,y\rangle\hat{e}r))$
(q) $Func(x) \leftrightarrow Rel(x) \& (Aw)(Az)(Ay)(\langle w,y\rangle\hat{e}x \& \langle w,z\rangle\hat{e}x \rightarrow y=z)$
(r) $f: x \rightarrow y \leftrightarrow Func(f) \& Dom(f)=x \& Rgn(f) \text{ Inkl } y$
(s) $x^{\wedge}y = \partial z(Set(z) \& Func(z) \& z: x \rightarrow y)$
(t) $aXb = \partial z((Ey)(Ex)(z = \langle y,x\rangle \& y\hat{e}a \& y\hat{e}b))$
(u) $Pt;m(x) = \partial y(Set(y) \& y \text{ Inkl } x)$

Svært viktig er den følgende definisjon:

Definisjon 6.1.2 $Set(x) \leftrightarrow At(x) \& (Ay)(y\hat{e}x \rightarrow Nec(y\hat{e}x)) \& (Ay)(\neg(y\hat{e}x) \rightarrow Nec(\neg(y\hat{e}x)))$

"Set(x)" kan leses "x er en mengde". Som det fremgår av definisjonen er mengder i denne forstand attributter som har den samme ekstensjon i enhver mulig verden, med andre ord det man kunne kalle for "konstante" attributter.

Definisjon 6.1.3 Anta F(x;1,...,x;n) er en åpen setning i L der x;1,...,x;n er de eneste fri variablene. Vi kaller da F(x;1,...,x;n) for Nec-bestemt relativt til MZFC hvis og bare hvis den følgende formel er et teorem i MZFC:

(Ax;1)...(Ax;n)(F(x,1,...,x;n) –> Nec(F(x,1,...,x;n))) &
(Ax;1)...(Ax;n)(¬F(x,1,...,x;n) –> Nec(¬F(x,1,...,x;n)))

Vi gir nok noen definisjoner:

Definisjon 6.1.4

(a) r(z) = ∂y((Eu)(yêu & (Aw)(<z,w>êr <–> w=u)))
(b) Set;f(x) <–> Set(x) & (Ay)(yêx –> Set(y))
(c) <x(u)>/uêy/ = ∂z((Eu)(z= x(u) & uêy)
(d) UN/uêy/(x(u)) = UN(∂z((Eu)(uêy & z= x(u))))
(e) Prod/uêy/(w(u)) = ∂z(Func(z) & Set(z) & Dom(z)=y & Rgn(z) Inkl UN/uêy/(w(u)) & (Au)(uêy –> z(u)êw(u)))

Vi ønsker å nevne enkelte satser i MZFC. Først nevner vi det følgende teorem:

Teorem 6.1.5 Anta F er en åpen setning med x;1,...,x;n som enetse fri variabler (n≥0) og at F er utelukkende bygd opp fra de Nec-bestemte formlene G;1,...,G;n ved hjelp av konnektivene Nec, Pos,¬, &, –>, <–>, v, A,E. Da er F(x;1,..,x;n) en åpen setning i L som Nec-bestemt relativt til MZFC.

Nec-bestemte formler vil bli gitt en mer fyldig omtale senere i et eget planlagt arbeid om MZFC. Her nevner vi bare at Teorem 6.1.5 kan bevises ved induksjon på lengden av formler som er konstruert på den angitte måten.

Teorem 6.1.6 De følgende formler er teoremer i MZFC:

(i) Set(x) & Set(y) & (Aw)(wêx <–> wêy). –> x=y
(ii) Set(x) –> Nec(Set(x))
(iii) Set(x) <–> (At(x) & (Ay)(Nec(yêx) v Nec(¬(yêx))))
(iv) Set(x) –> Set(Pt;m(x))
(v) Set(x) –> Set({x})
(vi) At(x) –> Set({x})
(vii) At(x) & At(y) –> Set({x,y})
(viii) At(x) & At(y) –> Set(<x,y>)
(ix) Set;f(x) –> Set(UN(x))
(x) Set(ø)
(xi) Set(x) –>. Set(Dom(x)) & Set(Rgn(x))
(xii) Set(x) –> Set(x;-1)
(xiii) Set(x) & Set(y) –> Set(x"y)
(xiv) Set(u) & Set(t) –> Set(uXt)
(xv) Set(x) & Set(y) –> Set(x^y)
(xvi) Set(x) & Set(y) –> Set(xUy) & Set(xΩy)
(xvii) Set(r) & (Ay)(Az)(<y,z>êr –> Set(y) & Set(r)) & Set(x) –> Set(r(x))
(xviii) Func(x) & Set(x) & Set(y) & (Az)(Aw)(<z,w>êx –> Set;f(z) & Set;f(w)) –>. Set(UN/uêy/(x(u))
(xix) At(z) –> (<x,y>êz –> xêUN(UN(z)))
(xx) At(z) –> ((Ey)(<x,y>êz) –> xêUN(UN(z)))
(xxi) At(y) & At(x) –> y"x Inkl Rgn(y)

(xxii) At(z) –> z;-1 Inkl Dom(z)XRgn(z)
(xxiii) Set(z) & Set(w) –> zXw Inkl Pt(Pt(zUw))
(xxiv) Set(z) & Set(w) –> zXw Inkl Pt;m(Pt;m(zUw))
(xxv) At(x) –> Pt;m(x) Inkl Pt(x)
(xxvi) At(x) & At(y) –> (x Inkl y –> Pt(x) Inkl Pt(y))
(xxvii) At(x) –> Pt;m(Pt;m(x)) Inkl Pt(Pt(x))
(xxviii) At(x) –> (At(Rgn(x)) & At(Dom(x)))
(xxix) At(x) –> At(x;-1)
(xxx) At(z) & At(w) –> At(zXw)
(xxxi) At(x) –> (At(Pt(x)) & At(Pt;m(x))
(xxxii) At(x) –> At(UN(x))
(xxxiii) At(x) & Nec((Ey)(yêx)) –> At(SN(x))
(xxxiv) At(x) & At(y) –> At(xΩy)
(xxxv) At(x) & At(y) –> At(xUy)
(xxxvi) At(x) –> Set(Pt(x))

Vi nevner ytterligere noen enkle satser:

Teorem 6.1.7 Anta F er en åpen setning i L med x som eneste fri variabel. Anta F er Nec-bestemt med hensyn på MZFC. Da har man at den følgende formel er et teorem i MZFC:
At(∂x(F(x))) –> Set(∂x(F(x)))

I forbindelse med dette teoremet er det også naturlig å nevne den følgende sats:

Teorem 6.1.8 Anta F er en åpen setning i L med x som eneste fri variabel. Anta F er Nec-bestemt med hensyn på MZFC. Da har man at den følgende formel er et teorem i MZFC:
Set(y) –> Set(∂x(xêy &F(x)))

Man ser at denne formelen i en viss forstand svarer til utsondringsaksiomet i ZFC.

§6.2 Noen avsluttende kommentarer til MZFC.

Det systemet som har blitt beskrevet ovenfor kan karakteriseres som en slags utvidet versjon av ZFC. Det virker ikke urimelig å tro at alle teoremer i ZFC har motstykker i MZFC. Dette innebærer at det meste, elle hele, den teorien man kan utvikle på grunnlag av ZFC-aksiomene også kan utvikles på basis av MZFC. Man skulle derfor være i stand til å definere klassen av ordinaltallene og vise de vanlige setninger av grunnleggende art som gjelder om disse. Videre skulle det ikke være noe i veien for at man skulle kunne bevise de vanlige rekursjons-eoremer som brukes til å rettferdiggjøre forskjellige typer av definisjoner ved transfinit induksjon. I så tilfelle skulle hele den klassiske Cantorianske teorien om uendelige ordinaltall og kardinaltall kunne utledes innenfor den rammen vi har beskrevet. Jeg anser det så godt som sikkert at dette faktisk lar seg gjøre, men det vil føre for langt å gå i detaljer her.

Det skulle også være mulig å definere det kumulative attributthierarki i MZFC. Den følgende definisjon synes adekvat:

(1) (i) A;c(0) = ø
(ii) A;c(a+1) = A;c(a) U Pt(A;c(a))
(iii) A;c(a) = UN/b<a/(A;c(b)) om b er et limesordinaltall.

Gitt denne definisjonen synes det også rimelig å tro at man skulle kunne bevise:

(2) (Ax)(At(x) –> (Ea)(aêOn & xêA;c(a)))

Merk at i (1) er Pt en litt spesiell "potensmengdeoperasjon". Pt er selvfølgelig definert ved Pt(x) = ∂y(At(y) & y Inkl x). I lys av (xxxvi) i Teorem 6.1.6 ser man at Pt(x) er en mengde om x er et attributt. Man bør også legge merke til forskjellen mellom Pt og Pt;m. I denne forbindelse kan man konsultere (xxv) – (xxvii) i Teorem 6.1.6.

Det kumulative mengdehierarki kan man definere på den følgende måten i MZFC:

(3) (i) M(0) = ø
(ii) M(a+1) = M(a)UPt;m(M(a))
(iii) M(a) = UN/b<a/(M(b)) om b er et limesordinal.

Merk at <M(a)>/aêOn/ definert på denne måten er det rene mengdehierarkiet. Er xêM(a) for noe aêOn vil alltid x, om de er forskjellig fra null-mengden, være en mengde som bare inneholder mengder. Det kan altså ikke dukke opp noen mengde i dette hierarkiet som inneholder attributter som ikke selv er mengder i den betydningen vi her har innført.

Dette avslutter vår omtale av systemet MZFC.

***

*

Appendix I

Et sammendrag av teorien T;A

*

§1 Innledning

Formålet med dette tillegget er kun å gi en oversikt over språket L;A og teorien T;A, kort sagt den teorien som ble introdusert i Kapittel I.

§2 Første-ordens språket L:A.

Første-ordens språket L;A er et vanlig første-ordens språk med identitet som inneholder ikke-logiske predikater og ikke-logiske konstanter. Språket inneholder imidlertid ikke funksjonsymboler.

De logiske symbolene i språket er: (i) En tellbart uendelig mengde med variabeltegn: x, y, z, w, x', y', z', w' … . (ii) De setningslogiske konnektivene ¬, &, v, –> og <–>. (iii) Kvantorene A og E som henholdsvis er allkvantoren og eksistenskvantoren. (iv) Identitetspredikatet: =.

Alle de logiske symbolene i språket tolkes på vanlig måte. De ikke-logiske symbolene er predikatene (1) – (6) og (17) –(35) og (39) – (59) på listen nedenfor og ingen andre. De uttrykkene som er listet opp ved (36) – (38) er konstantene i språket L;A. Ingen andre uttrykk er konstanter i dette språket.

Når det gjelder listen nedenfor er de uttrykkene som er oppført til høyre de forkortelsene vi bruker og har brukt for de lengere uttrykkene til venstre.

Liste over ikke-logiske predikater i L;A:

(1)	"x er en setning i språket y"	– "Setn(x,y)"
(2)	"x er et uttrykk i språket y"	– "Expr(x,y)"
(3)	"x er en konstruksjon i språket y"	– "Konstr(x,y)"
(4)	"Norsk"	– "n;0"
(5)	"x representerer et formalisert versjon av et fragment av språket y"	– "Repfrag(x,y)"
(6)	"x er et språk"	– "Språk(x)"
(17)	"x er en konstruksjon av type y i språket z"	– "KonTyp(x,y,z)"
(18)	"x er en konstruksjon av type y i språket z som er entydig med hensyn på grunnbetydning"	– "KonTypE(x,y,z)"
(19)	"x er en termdannende konstruksjon av type y i språket z"	– "TmKonTyp(x,y,z)"
(20)	"x er en formeldannende konstruksjon av type y i språket z"	– "FmKonTyp(x,y,z)"
(21)	"x er en termdannende konstruksjon av type y i språket z som er entydig med hensyn på grunnbetydning"	– "TmKonTypE(x,y,z)"
(22)	"x er en formeldannende konstruksjon av type y i språket z som er entydig med hensyn på grunnbetydning"	– "FmKonTypE(x,y,z)"
(23)	"x er en formel i språket y"	– "Form(x,y)"
(24)	"x er en term i språket y"	– "Tm(x,y)"
(25)	"x er en lukket term i språket y"	– "CTm(x,y)"
(26)	"x er en åpen term i språket y"	– "OTm(x,y)"
(27)	"x er en lukket formel i språket y"	– "CForm(x,y)"

(28) "x er en åpen formel i språket y" – "OForm(x,y)"
(29) "x er en setning som er entydig med hensyn på grunnbetydning i språket y" – "SetnE(x,y)"
(30) "x er en formel i y som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "FormE(x,y)"
(31) "x er en term som i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "TmE(x,y)"
(32) "x er en lukket term i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "CTmE(x,y)"
(33) "x er en åpen term i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "OTm(x,y)"
(34) "x er en lukket formel i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "CForm(x,y)"
(35) "x er en åpen formel i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "OForm(x,y)"

(36) a, b, c, ... , å
(37) A, B, C, ..., Å
(38) (,), !, ?, , , ' , . , *

(39) "x er medlem av y" – "xêy"

(40) "x er en mulig verden" – "MV(x)"
(41) "x er et mulig individ" – "MI(x)"
(42) "x eksisterer i verdenen y" – "Eksi(x,y)"
(43) "x er en ikke-eksisterende entitet" – "Non(x)"
(44) "x er den aktuelle verden" – "Akt(x)"
(45) "x er grunnbetydningen til y i z relativt til w og u" – "GMen(x,y,z,w,u)"
(46) "x er grunnbetydningen til y i z relativt til w" – "GMen(x,y,z,w)"
(47) "x er grunnbetydningen til y i z" – "GMen(x,y,z)"
(48) "x er meningen til y i z" – "Men(x,y,z)"
(49) "x er sann i y relativt til z og w" – "Sann(x,y,z,w)"
(50) "x er sann i y relativt til w" – "Sann(x,y,w)"
(51) "x er sann i y" – "Sann(x,y)"
(52) "x er ekstensjonen til y i z relativt til w og u" – "Eksten(x,y,z,w,u)"
(53) "x er ekstensjonen til y i z relativt til w" – "Eksten(x,y,z,w)"
(54) "x er ekstensjonen til y i z" – "Eksten(x,y,z)"
(55) "x er referansen til y i z relativt til w og u" – "Ref(x,y,z,w,u)"
(56) "x er referansen til y i z relativt til w" – "Ref(x,y,z,w)"
(57) "x er referansen til y i z" – "Ref(x,y,z)"
(58) "x er en verditilordning" – "VTO(x)"
(59) "x er en verditilordning over y" – "VTO(x,y)"

Med denne listen over ikke-logiske predikater har vi gitt en helt fullstendig definisjon av språket L;A.

§2 Første-ordens teorien T:A

Teorien T;A som vi har utarbeidet i kapittel I er en første-ordens teori i språket L;A. Som enhver annen første-ordens teori i et språk av samme type som L;A er teorien bestemt ved sine logiske og ikke-logiske aksiomer samt de slutningsreglene som inngår i den.

Nedenfor spesifiserer under (a) – (c) henholdsvis de logiske aksiomene som inngår i T;A, de ikke-logiske aksiomene og slutningsreglene.

(a) De logiske aksiomene i T;A er alle instanser av de følgende skjemaer der F, G og H er vilkårlige formler i L;A:

(1) F –> (G –> F)
(2) (¬F –> ¬G) –> (G –> F)
(3) (F –>(G–>H)) –>((F–>G) –> (F –>H))
(4) (Ax)F –> F;x[t] hvor t enten er en konstant eller et variabeltegn i L;A.
(5) (Ax)(F –>G) –>(F–> (Ax)G) forutsatt at x er et variabeltegn som ikke forekommer fritt i formelen F.
(6) t1 =t1' & t2 = t2' & .... & tn = tn' –> (Pt1...tn <–> Pt1' ... tn') forutsatt at P er et n-ært predikat i L;A og t1,...,t,t1',...,tn' enten er variabeltegn eller konstanter i L;A
(7) (Ax)(x=x)
(8) (Ax)(Ay)(Az)(x=y & y=z –> x=z)
(9) (Ax)(Ay)(x=y –> y=x)
(10) FvG –> ((¬F) –>G)
(11) ((¬F) –>G) –> FvG
(12) F&G –> ¬((¬F) v (¬G))
(13) ¬((¬F) v (¬G)) –> F&G
(14) (F <–> G) –> (F –>G)
(15) (F <–> G) –> (G –> F)
(16) (F–> G) –>((G–>F) –> (F <–>G))
(17) (Ex)F –> ¬(Ax)¬F
(18) ¬(Ax)¬F –> (Ex)F

Dette gir en fullstendig oversikt over de logiske aksiomene i T;A.

(b) De ikke-logiske aksiomene i T;A er de universelle lukningene av de følgende formler i L;A: H1 – H12, A1 – A10, On1 – On10, Sm1 – Sm26 og endelig FSm1 – FSm14. Disse formlene har blitt spesifisert og kommentert i Kapittel I og vi lager ikke en ny liste over dem her.

(c) Bruker vi "Th(A)" som forkortelse for "A er et teorem" kan de to slutningsreglene som inngår i T;A, nemlig modus ponens og universell generalisering formuleres slik:

(MP) Th(F) & Th(F–>G) –> Th(G)
UG) Th(F) –> Th((Ax)F)

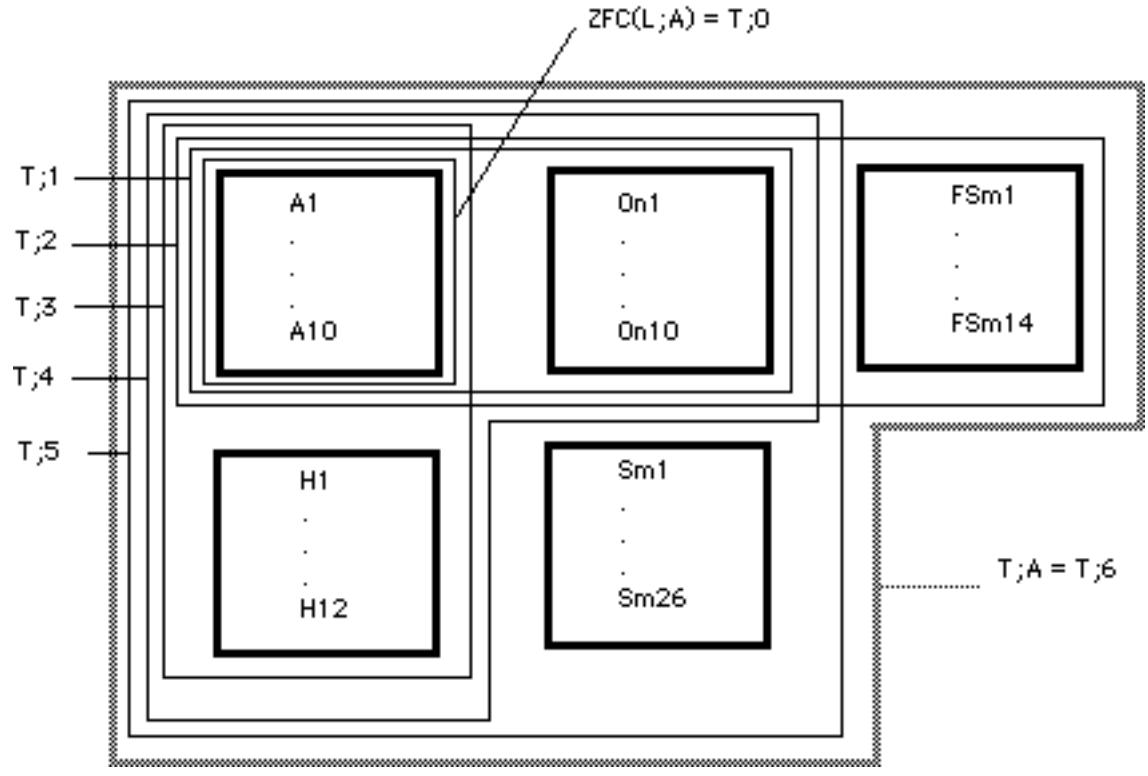
Ved at vi nå har spesifisert detaljert de logiske og ikke-logiske aksiomene i T;A samt slutningsreglene som inngår i teorien er teorien fullstendig definert.

§3 Oversikt over enkelte komponenter, subteorier, i T:A.

Den følgende figur gir en viss oversikt over de enkelte hoveddelene av T;A og hvordan de henger sammen.

De innerste rektanglene i figuren representerer de fem hovedklassene av ikke-logiske aksiomer i teorien. De andre polygonene som er tegnet utenfor disse firkantene representerer forskjellige aksiomklasser. ZFC(L;A) representerer f.eks, klassen av de mengdeteoretiske aksiomene i L;A.

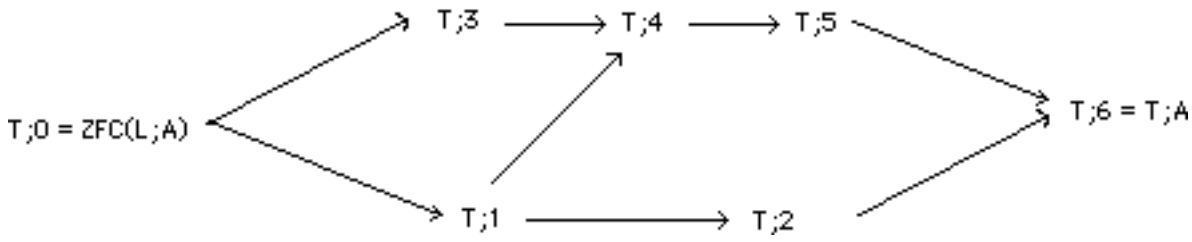
FIGUR 1



Studerer man figuren ser man at T;1 representerer aksiomklassen som består av aksiomene A1 – A10 og On1 – On10. Videre representer firkantet T;5 aksiomklassen {A1,...,A10, On1,..., On10, H1, ... , H12, Sm1, ..., Sm26}. La nå jê{0,...,5}. Da er T;j den første-ordens teorien som har L;A som språk og hvor de logiske aksiomene er dem som er nevnt ovenfor. De ikke-logiske aksiomene er dem som befinner seg innenfor polygonet som er merket "T;j". Slutningsreglene i T;j er modus ponens (MP) og universell generalisering (UG). Teoriene i familien <T;j>/jê{0,...,5} er altså forskjellige subteorier av T;A.

Inklusjonsforholdene mellom disse teoriene fremgår av den følgende figur:

FIGUR 2



Hvis en pil går fra en teori til en annen innebærer dette at teoremene i den teorien pilen peker fra er inkludert i teoremene til den teorien pilen peker mot. Figuren skulle således gi en forholdsvis klar oversikt over relasjonene mellom fragmentene T;0 – T;6 av teorien T;A.

Det er naturligvis mulig å lage en tilsvarende diagrammer for alle teoriene i den teorifamilien vi har spesifisert i denne avhandlingen dvs. T;C, T;B, T;D og teoriene T;A*, T;B*, T;C* og T;D*. Disse teoriene ble definert og kommentert i Kapittel II. Imidlertid skal vi ikke gjøre dette her.

*

Appendix II

Spesifikasjon av noen tentative utvidelser av førsteordens språket L;A

*

§1 Innledning

I Appendix I spesifiserte vi det ikke-logiske vokabularet i språket L;A. I dette tillegget skal vi angi en rekke mulige utvidelser av dette språket. Hensikten er bare å spesifisere utvidelser av L;A som resulterer i rikere språk hvor påstander kan uttrykkes som ikke kan uttrykkes i L;A. I disse mer omfattende språkene kan man formulere uendelig mange teorier som innbyrdes sett er uforenelige. Det er ikke hensikten å spesifisere mer konkrete teorier i disse mer omfattende begrepsrammene her med det for øye å undersøke de logiske relasjonene mellom teoriene. Fremstøt i denne retning vil bli foretatt i Del II i dette arbeidet.

§2 Liste over ikke-logiske predikater i L:A:

(1) "x er en setning i språket y" – "Setn(x,y)"
(2) "x er et uttrykk i språket y" – "Expr(x,y)"
(3) "x er en konstruksjon i språket y" – "Konstr(x,y)"
(4) "Norsk" – "n;0"
(5) "x representerer et formalisert versjon av et fragment av språket y" – "Repfrag(x,y)"
(6) "x er et språk" – "Språk(x)"

(17) "x er en konstruksjon av type y i språket z" – "KonTyp(x,y,z)"
(18) "x er en konstruksjon av type y i språket z som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "KonTypE(x,y,z)"
(19) "x er en termdannende konstruksjon av type y i språket z" – "TmKonTyp(x,y,z)"
(20) "x er en formeldannende konstruksjon av type y i språket z" – "FmKonTyp(x,y,z)"
(21) "x er en termdannende konstruksjon av type y i språket z som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "TmKonTypE(x,y,z)"
(22) "x er en formeldannende konstruksjon av type y i språket z som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "FmKonTypE(x,y,z)"
(23) "x er en formel i språket y" – "Form(x,y)"
(24) "x er en term i språket y" – "Tm(x,y)"
(25) "x er en lukket term i språket y" – "CTm(x,y)"
(26) "x er en åpen term i språket y" – "OTm(x,y)"
(27) "x er en lukket formel i språket y" – "CForm(x,y)"
(28) "x er en åpen formel i språket y" – "OForm(x,y)"
(29) "x er en setning som er entydig med hensyn på grunnbetydning i språket y" – "SetnE(x,y)"
(30) "x er en formel i y som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "FormE(x,y)"
(31) "x er en term som i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "TmE(x,y)"
(32) "x er en lukket term i språket y som er entydig

med hensyn på grunnbetydning" – "CTmE(x,y)"
(33) "x er en åpen term i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "OTm(x,y)"
(34) "x er en lukket formel i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "CForm(x,y)"
(35) "x er en åpen formel i språket y som er entydig med hensyn på grunnbetydning" – "OForm(x,y)"

(36) a, b, c, ... , å
(37) A, B, C, ..., Å
(38) (,), !, ?, , , ' , . , *

(39) "x er medlem av y" – "xêy"

(40) "x er en mulig verden" – "MV(x)"
(41) "x er et mulig individ" – "MI(x)"
(42) "x eksisterer i verdenen y" – "Eksi(x,y)"
(43) "x er en ikke-eksisterende entitet" – "Non(x)"
(44) "x er den aktuelle verden" – "Akt(x)"
(45) "x er grunnbetydningen til y i z relativt til w og u" – "GMen(x,y,z,w,u)"
(46) "x er grunnbetydningen til y i z relativt til w" – "GMen(x,y,z,w)"
(47) "x er grunnbetydningen til y i z" – "GMen(x,y,z)"
(48) "x er meningen til y i z" – "Men(x,y,z)"
(49) "x er sann i y relativt til z og w" – "Sann(x,y,z,w)"
(50) "x er sann i y relativt til w" – "Sann(x,y,w)"
(51) "x er sann i y" – "Sann(x,y)"
(52) "x er ekstensjonen til y i z relativt til w og u" – "Eksten(x,y,z,w,u)"
(53) "x er ekstensjonen til y i z relativt til w" – "Eksten(x,y,z,w)"
(54) "x er ekstensjonen til y i z" – "Eksten(x,y,z)"
(55) "x er referansen til y i z relativt til w og u" – "Ref(x,y,z,w,u)"
(56) "x er referansen til y i z relativt til w" – "Ref(x,y,z,w)"
(57) "x er referansen til y i z" – "Ref(x,y,z)"
(58) "x er en verditilordning" – "VTO(x)"
(59) "x er en verditilordning over y" – "VTO(x,y)"

§3 Begreper av relevans for påstander om tidsforhold, prosesser og hendelser i tid.

(1) "x er et tidspunkt" – "Tp(x)"
(2) "Tidspunktet x kommer før tidspunktet y" – "FørT(x,y)"
(3) "Tidspunktet x kommer etter tidspunktet y" – "EtterT(x,y)"
(4) "x er et reelt tall" – "Reell(x)"
(5) "z er et reelt tall som angir tidsavstanden mellom tidspunktet x og tidspunktet y i minutter" – "DistT(z,x,y)"

§4 Begreper av relevans for påstander om aksepterbarhet og evidens.

(1) "x er et utsagn som beskriver et forhold som er evident for y ved tidspunktet t i verdenen w" – "Evid(x,y,t,w)"

(2) "x er et utsagn som beskriver et forhold som er evident for y ved tidspunktet t" – "Evid(x,y,t)"

(3) "x er et utsagn som y kan kontrollere riktigheten av ved tidspunktet t i verdenen w" – "Kontr(x,y,t,w)"

(4) "x er en teori som bør aksepteres gitt riktigheten av y relativt til verdenen w" – "BørA(x,y,w)"

(5) "x er en verden som er enklere enn verdenen y relativt til verdenen w" – "Enk(x,y,w)"

(6) "x er en verden som er like enkel som verdenen y relativt til verdenen w" – "LEnk(x,y,w)"

(7) "x representerer alt som kan anses for gitt for y ved tidspunktet t i verdenen w" – "ATGitt(x,y,t,w)"

(8) "x representerer alt som kan anses for gitt ved tidspunktet t i verdenen w" – "AGitt(x,y,w)"

(9) "x representerer alt som kan anses for gitt i verdenen w" – "AGitt(x,w)"

(10) "x representerer endel av alt som kan anses for gitt for y ved tidspunktet t i verdenen w" – "DGitt(x,y,t,w)"

(11) "x representerer endel av alt som kan anses for gitt ved tidspunktet t i verdenen w" – "DGitt(x,t,w)"

(12) "x representerer endel av alt som kan anses for gitt i verdenen w" – "DGitt(x,w)"

(13) "x er et utsagn som kan anses for evident i verdenen w" – "Evid(x,w)"

(14) "x er et utsagn som beskriver noe som kan anses for direkte evident i verdenen w" – "DirEvid(x,w)"

(15) "x er et utsagn som kan anses for direkte evident for y ved tidspunktet t i verdenen w" – "DirEvid(x,y,t,w)"

§5 Begreper av relevans for viten og tro.

(1) "x er et utsagn som beskriver et forhold y vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w" – "Vet(y,x,t,w)"

(2) "x er et utsagn som beskriver et forhold y tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w" – "Tror(y,x,t,w)"

(3) "x er et utsagn som beskriver et forhold y vet er tilfelle på grunnlag av ren sanseiaktagelse ved tidspunktet t i verdenen w " – "Iakt(y,x,t,w)"

(4) "x er et utsagn som beskriver et forhold y ser er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w" – "Ser(y,x,t,w)"

(5) "x er et utsagn som beskriver et forhold y hører er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w" – "Hør(y,x,t,w)"

(6) "x er et utsagn som beskriver et forhold y har et inntrykk av at er tilfelle ved tidspunktet t

i verdenen w" – "Inntr(y,x,t,w)"

(7) "x er et utsagn som beskriver et forhold som y retter oppmerksomheten mot ved tidspunktet t i verdenen w" – "Ropp(x,y,t,w)"

§6 Begreper av relevans for påstander som har med kausalitet og årsaksforklaring å gjøre.

(1) "x er et tidspunkt" – "Tp(x)".
(2) "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y" – "x<y".
(3) "w er den aktuelle verden " – "Aktuell(w)"
(4) "x er en totaltilstand som foreligger realisert i verdenen w ved tidspunktet t" – "TL(x,w,t)".
(5) "x er en kausallov som gjelder i verdenen w" – "CLov(x,w)"
(6) "x er et reelt tall som angir avstanden mellom tidspunktet t;1 og tidspunktet t;2 " – "Dist(x,t;1,t;2)"

§7 Begreper av relevans for påstander om handling og etiske forhold.

(1) "h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w" – "Alt;w(h,x,t)"
(2) "h;1 er et handlingsalternativ som er minst like bra som h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w" – "Mb;<w,x,t>(h;1,h;2)"
(3) "h er et handlingsalternativ som x realiserer fra og med tidspunktet t i verdenen w" – "Re;w(h,x,t)"
(4) "w;1 er en mulig verden som er minst like bra som verdenen w;2" – "Br(w;1,w;2)"
(5) "Verdenen w;1 er historisk identisk med verdenen w;2 opp til og inkludert tidspunktet t" – "Hist;t(w;1,w;2)"
(6) "t er et tidspunkt" – "Tp(t)"
(7) "t er et tidspunkt som kommer før tidspunktet t' " – "t<t'"

***

(1) "h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w" – "Alt;w(h,x,t)"
(2) "h er et handlingsalternativ som det etisk sett er tillatt for x å realisere ved tidspunktet t i verdenen w" – "Til;<w,t>(x,h)"
(3) "h er et handlingsalternativ som x bør utføre i verdenen w ved tidspunktet t" – "Bør;<w,t>(x,h)"
(4) "k er et utsagn som beskriver en mulig konsekvens som kan inntreffe om x ved tidspunktet t utfører handlingsalternativet h i verdenen w" – "Kon;<x,h,w,t>(k)"
(5) "z er sannsynligheten for k gitt at x utfører alternativet h i verdenen w ved tidspunktet t" – "Pr;<x,h,w,t>(z,k)"

(6) "f er en etisk verdifunksjon over klassen av utsagn" – "VE(f)"

(7) "x er et tidspunkt" – "Tp(x)"

(8) "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y" – "Før(x,y)"

(9) "x er en person" – "Ps(x)"

(10) "x realiserer handlingsalternativet h fra og med tidspunktet t i verdenen w" – "Re;w(h,x,t)"

(11) "z er vekten til klassen y av mulige konsekvenser som kan inntreffe om x realiserer handlings-alternativet h ved tidspunktet t i verdenen w relativt til verdifunksjonen f " – "Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f)"

(12) "z er den forventede verdi relativt til verdifunksjonen f som handlingsalternativet h har for x ved tidspunktet t i verdenen w" – "Forv;(x,t,w)(z,h,f)"

*

Appendix III

Endel elementære resultater i ZFC.

*

§1 Innledning

I dette tillegget skal vi forholdsvis detaljert utvikle ZFC, Zermelo -Fraenkel mengdelære med utvalgsaksiom, og bevise endel teoremer i dette systemet. Vi føler et visst behov for dette fordi vi ønsker å gi bevis for eksistensen av de forskjellige språkstrukturene og andre mengdeteoretiske størrelsene vi har innført. Siden vi også i andre forbindelser trenger resultater fra mengdelæren kan det derfor være av en viss interesse å gi en forholdsvis utførlig fremstilling av den mengdeteoretiske delen av T;A. Det er også en annen, men muligens mindre vesentlig, grunn til at vi her gjennomgår de mer elementære deler av ZFC. Grunnen er at vi i et annet arbeid ønsker å utvikle teorien MZFC og vise at motstykker til alle de vanlige satsene i ZFC kan bevises i dette systemet. Det kan da være formålstjenlig å ha foran seg detaljerte bevis for de mest grunnleggende satsene i ZFC.

§2 Noen elementære satser om eksistensen av mengder.

Vi skal i første omgang gi bevis for visse enkle satser om eksistens. Men aller først gir vi den følgende definisjon av hva som menes med enhetmengden som inneholder objektet a, {a}, det uordnede par av objektene a,b, {a,b}, det uordnede n-tuple {a1, ... , an}, det ordnede par av a og b, <a,b> og hva som menes med n-tuplet av objektene a;1,...,a;n, <a;1,....,a;n>.

Definisjon 2.1

(i) $\{a\} = Mg(x: x=a)$
(ii) $\{a,b\} = Mg(x: x=a \vee x=b)$
(iii) $\{a;1,....,a;n\} = Mg(x: x=a;1 \vee ... \vee x= a;n)$
(iv) $<a,b> = \{\{a\},\{a,b\}\}$
(v) $<a;1,....,a;(n+1)> = <<a;1,...,a;n>,a;(n+1)>$

Den første satsen er denne:

Teorem 2.1 (ZFC) Man har at de universelle lukningene av de følgende formler holder:

(i) $(Ey)(y = \{x\})$
(ii) $(Ez)(z = \{x,y\})$
(iii) $(Ey)(y = \{x;1,....,x;n\}$
(iv) $(Ey)(y = <x,z>)$
(v) $(Ey)(y = <x;1, ... ,x;n>$

Bevis: Man bruker parmengde aksiomet og foreningsmengdeaksiomet for å vise dette. Detaljene overlates til leseren. **Q.E.D.**

Det neste teoremet viser at det ordnete par av x og y slik som det er blitt definert ovenfor har de egenskapene som man skulle forvente:

Teorem 2.2 (ZFC) $<x,y> = <z,w> \leftrightarrow (x=z \,\&\, y = w)$

Bevis: Kondisjonalen mot venstre følger direkte ved hjelp av identitets-aksiomene i ZFC. Anta $<x,y> = <z,w>$. Fra definisjonen av $<x,y>$ følger da
(0) $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{z\}, \{z,w\}\}$. Da har man $\{x\} \hat{e} \{\{z\},\{z,w\}\}$ og følgelig at:
$x=z \vee (x=z = w)$. Man kan nå skille mellom to tilfelle.

Tilfelle (i): Anta (1) x=z. Fra (0) følger at {x,y}ê{{z},{z,w}}. Dette impliserer at {x,y} = {z} v {x,y} = {z,w}. I det første tilfelle her har man x=z=y og derfor i lys av (0) at {{x}} = {{x}, {x,w}}. Men dette impliserer x=w. Sammenfattende har vi i dette tilfellet at x=z=y = w som viser at satsen i dette tilfellet holder. Har man {x,y} = {z,w} følger {x,y} = {x,w} siden x=z. Er da y=x kan man slutte at y=w og er på den annen side y≠x må også y=w. I begge tilfelle har vi at x=z og y=w. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): Anta x=z=w. Da har man ved hjelp av (0) at {{z}} = {{z},{z,y}}. Men herav kan man slutte {z}={z,y} som impliserer z=y. Derfor har man også i dette tilfellet at x=z og y=w. **Q.E.D.**

Den følgende definisjon fikserer betydningen til endel vanlig mengdeteoretisk notasjon:

Definisjon 2.2(i) ø= Mg(x: x≠x)
(ii) a Inkl b <–> (Ax)(xêa –> xêb)
(iii) Pt(a) = Mg(z: z Inkl a)
(iv) UN(a) = Mg(z: (Ey)(zêy & yêa))
(v) aUb = UN({a,b})
(vi) SN(a) = Mg(z: (Ay)(yêa –> zêy))
(vii) aΩb = Mg(z: zêa & zêb)
(viii) a–b = Mg(x: xêa & ¬(xêb))
(ix) Δ(a,b) = (a– b)U(b – a)

Man ser at "ø" betegner nullmengden. "a Inkl b" innebærer at a er inkludert i b. "Pt(a)" betegner potensmengden til a. Unionen av mengdene i a, og snittet av mengene i a, betegnes henholdsvis med "UN(a)" og "SN(a)". aUb er unionen av mengdene a og b, aΩb er snittet av dem. Endelig er a–b differansen mellom a og b, og Δ(a,b) det som ofte kalles den "symmetriske" differans mellom a og b.

Teorem 2.3 (ZFC) Man har at de universelle lukningene av de følgende formler holder:
(i) (Ey)(y=ø)
(ii) (Ez)(z = Pt(x))
(iii) (Ez)(z= UN(x))
(iv) (Ez)(z = xUy)
(v) (Ez)(z = xΩy)
(vi) x≠ø –> (Ez)(z= SN(x))

Bevis: (i) holder i lys av nullmengde aksiomet. Når det gjelder (ii) følger denne ved hjelp av definisjonen av "Pt(x)" og potensmengdeaksiomet. (iii) og (iv) følger ved hjelp av foreningsmengdeakiomet. Endelig kan man rettferdigjøre (v) og (vi) ved hjelp av utsondringsaksiomet. **Q.E.D.**

Definisjon 2.3(i) Rel(r) <–> (Ax)(xêr –> (Ey)(Ez)(x=<y,z>))
(ii) Dom(r) = Mg(x: (Ey)(<x,y>êr))
(iii) Rgn(r) = Mg(x: (Ey)(<y,x>êr)
(iv) Rest(r,z) = Mg(u: uêr & (Ex)(Ey)(u=<x,y> & xêz))
(v) r;-1 = Mg(u: (Ex)(Ey)(u = <x,y> & <y,x>êr)
(vi) r"z = Mg(y: (Ex)(xêz & <x,y>êr))
(vii) r‘z = Mg(y: (Eu)((Aw)(<z,w>êr <–> w=u) & yêu)

Man kan nå vise at operasjonene innført i Definisjon 2.3 er legitime, dvs. starter man med menger vil operasjonene alltid lede en til nye mengder:

Teorem 2.4 (ZFC) Man har at de universelle lukningene av de følgende formler holder:

(i) (Ey)(y= Dom(x))
(ii) (Ey)(y = Rgn(x))
(iii) (Ey)(y = Rest(x,z))
(iv) (Ey)(y = x;-1)
(v) (Ey)(y = x"z)
(vi) (Ew)(w = x‘y)

Bevis: Ad (i): Anta (0) <z,w>êx. Da har man at det fines y som er slik at:
(1) (Au)(uêy <–> uê<z,w>) & yêx. Herav følger:

(2) (Au)(uêy <–>(u={z} v u={z,w})

(2) innbærer at {z,w}êy v {z}êy. I det første tilfelle har man i lys av Teorem 2.1 at det finnes s slik at (3) z,wêsêy. På tilsvarende vis finner man i det andre tilfellet at det finnes t der (4) zêt & têy. I lys av (1), (3) og (4), samt foreningsmengde-aksiomet følger det at z,wêUN(UN(x)). Siden z,w var vilkårlige har vi derfor så langt bevist: (5) (Ax)(Az)(Aw)(<z,w>êx –> z,wêUN(UN(x))). Følgelig har man:

(Az)((Ew)(<z,w>êx) –> zêUN(UN(x))). Ved hjelp av utsondringsaksiomet følger fra dette at (Ey)(y= Dom(x)).

Ad (ii): På en helt analog måte innser man at (Ey)(y = Rgn(x)) holder ved hjelp av definisjonen av Rgn(x), (5), foreningsmengde-aksiomet og utsondrings-aksiomet.

Ad (iii): Ved hjelp av definisjonen av Rest(x,z) har man at Rest(x,z) Inkl x. Det følger derfor at (Ey)(y= Rest(x,z)) ved hjelp av utsondringsaksiomet.

Ad (iv): Fra formelen (5) ovenfor har man ved hjelp av potensmengdeaksiomet og foreningsmengdeaksiomet at:

(6) (Az)(Aw)(<z,w>êx –> <w,z>êPt(Pt(UN(UN(x))))). Herav følger:

(Au)((Ez)(Ew)(u= <w,z> & <z,w>êx –> uêPt(Pt(UN(UN(x)))))). Dette, potensmengdeaksiomet, foreningsmengdeaksiomet, utsondringsaksiomet og definisjonen av x;-1 impliserer (Ey)(y = x;-1).

Ad (v): Fra (5) ovenfor følger: (Ey)(yêz & <y,w>êx) –> wêUN(UN(x))). Ved hjelp av foreningsmengdemengdeaksiomet og utsondringsaksiomet følger da (Ey)(y= x"z). Punkt (v) overlates til leseren. **Q.E.D.**

Definisjon 2.4(i) Func(f) <–> (Rel(f) &
(Az)(Ax)(Ay)(<z,x>êf & <z,y>êf –> x=y))
(ii) f: x –> y <–>. Func(f) & Dom(f) =x & Rgn(f) = y
(iii) x^y = Mg(z: z: y –> x)

Man har:

Teorem 2.5 (ZFC) (Ax)(Ay)((Ez)(z = x^y))

Bevis: Det er lett å vise at (f: y –> x) –> f Inkl Pt(Pt(xUy)). Fra dette følger så ved hjelp av tidligere teoremer: f: y–>x –> fêPt(Pt(Pt(xUy))). Siden vi på grunnlag av tidligere teoremer har at det finnes z slik at z= Pt(Pt(Pt(xUy))) følger det ved hjelp av definisjonen av x^y og utsondringsaksiomet at (Ez)(z = x^y). **Q.E.D.**

Definisjon 2.5(i) aXb = Mg(<x,y>: xêa & yêb)

(ii) $f^{\circ}g = Mg(<x,y>:(Ez)(<x,z>\hat{e}g \& <z,y>\hat{e}f))$

Den følgende sats viser at aXb er en mengde om a og b er det, og at $f^{\circ}g$ er en mengde om f og er det:

Teorem 2.6 (ZFC) (i) $(Ax)(Ay)(Ez)(z = xXy)$
(ii) $(Ax)(Ay)((Ez)(z = x^{\circ} y)$

Bevis: Ad (i): Det er lett å vise at man har:

(1) $x\hat{e}a \& y\hat{e}b \& u=<x,y> \rightarrow u\hat{e}Pt(Pt(aUb))$. Siden man i lys av tidligere teoremer har at det finnes noe w slik at $w= Pt(Pt(aUb))$ følger ved hjelp av (1) at (2) $Mg(u: (Ey)(Ex)(u = <x,y> \& x\hat{e}a \& x\hat{e}b))$ Inkl w. Fra dette og utsondrings-aksiomet følger $(Ey)(y= aXb)$. Siden a og b var vilkårlige følger så (i).

Ad (ii): Man har:

(1) $(Ez)(<x,z>\hat{e}a \& <z,y>\hat{e}b) \rightarrow x\hat{e}UN(UN(a)) \& y\hat{e}UN(UN(b))$

Fra dette følger så:

(2) $(Ez)(<x,z>\hat{e}a \& <z,y>\hat{e}b)) \rightarrow <x,y>\hat{e}Pt(Pt(UN(UN(a))U UN(UN(b))))$. Man har følgelig:

(3) $(Ez)(Ey)(u =<x,y> \& (Ez)(<x,z>\hat{e}a \& <z,y>\hat{e}b)) \rightarrow u\hat{e}Pt(Pt(UN(UN(a))U UN(UN(b))))$

Fra (3) følger så $b^{\circ}a$ ved hjelp av potensmengde, foreningsmengde og utsondringsaksiomet. **Q.E.D.**

Definisjon 2.6
(i) $<x(i)>/i\hat{e}y/ = Mg(<i,x(i)>: i\hat{e}y)$
(ii) $UN/i\hat{e}y/(x(i)) = UN(Mg(x(i): i\hat{e}y))$
(iii) $Prod/i\hat{e}y/(x(i)) = Mg(f: f: y \rightarrow UN/i\hat{e}y/(x(i)) \& (Ai)(i\hat{e}y \rightarrow f(i)\hat{e}x(i)))$

$<x(i)>/i\hat{e}y/$ er mengdefamilien x(i) indeksert på y. $UN/i\hat{e}y/(x(i))$ er unionen av de diverse x(i) ettersom i gjennomløper y. Endelig er $Prod/i\hat{e}y/(x(i))$ produktet av de diverse x(i) for iêy, mao. det kartesiske produkt av mengefamilien $<x(i)>/i\hat{e}y/$.

Teorem 2.7 (ZFC) (i) $(Ax)(Ay)(Ez)(z = <x(i)>/i\hat{e}y/)$
(ii) $(Ax)(Ay)((Ez)(z = UN/i\hat{e}y/(x(i)))$
(iii) $(Ax)(Ay)(Ez)(z = Prod/i\hat{e}y/(x(i)))$

Bevis: Ad (i): La oss sette $F(z,w) <\rightarrow (<z,w>\hat{e}Mg(<i,x(i)>: i\hat{e}y)$. Da er det lett å vise at $(Ax)(Ay)(Az)(F(x,y) \& F(x,z) \rightarrow y=z)$. Fra dette og substitusjonsaksiomet følger at det finnes b slik at: (1) $(Au)(u\hat{e}b <\rightarrow (Er)(r\hat{e}y \& F(r,u)))$. Nå er det heller ikke vanskelig å vise at $(Er)(r\hat{e}y \& F(r,u)) <\rightarrow (Er)(r\hat{e}y \& u= x(r))$. Det følger at $b= Mg(x(r): r\hat{e}y)$. Nå har man $Mg(<i,x(i)>: i\hat{e}y)$ Inkl yXb. Siden yXb finnes om y og b gjør det følger det ved hjelp av utsondringsaksiomet at $Mg(<i,x(i)>:i\hat{e}y)$ finnes. I lys av definisjonen av $<x(i)>/i\hat{e}y/$ følger da
$(Ez)(z =<x(i)>/i\hat{e}y/$

Ad (ii). På samme måte som under punkt (i) viser man at det finnes b slik at $b= Mg(x(r): r\hat{e}y)$. Ved hjelp av foreningsmengdeaksiomet følger det da at det finnes z der $z= UN(b) = UN(Mg(x(r): r\hat{e}y)) = UN/i\hat{e}y/(x(i))$.

Ad (iii). Ved hjelp av punkt (ii) og Teorem 2.5 har man at det finnes z der $z= (UN/i\hat{e}y/(x(i)))^{\wedge}y$. Det er så lett å vise at man har:

$(Af)(f: y\rightarrow UN/i\hat{e}y/(x(i)) \& (Ai)(i\hat{e}y \rightarrow f(i)\hat{e}x(i)) \rightarrow f\hat{e}z)$.

Fra dette, utsondringsaksiomet og definisjonen av Prod/iêy/(x(i)) følger så (Ez)(z=Prod/iêy/(x(i))). **Q.E.D.**

§3 Ordinaltall

Vi gir først den følgende definisjon:

Definisjon 3.1(i) Trans(x) <–> (Ay)(Az)(yêz & zêx –> yêx)
(ii) Connex(x) <–> (Ay)(Az)(yêz & zêx –> (yêz v y=z v zêy))
(iii) Ord(x) <–> (Trans(x) & Connex(x))
(iv) x<y <–> (Ord(x) & Ord(y) & xêy)
(v) x≤y <–> (Ord(x) & Ord(y) &(x<y v x=y))

Uttrykket "Trans(x)" betyr at x er en transitiv mengde. "Connex(x)" leses "x er en sammenhengende mengde". Er x en sammenhengende og transitiv mengde er x et ordinaltall, Ord(x). < er mindre-enn relasjonen mellom ordinaltall; ≤ er relasjonen "minst like stor som" mellom ordinaltall.

Vi beviser først:

Teorem 3.1 (ZFC) (i) Ord(x) & yêx –> Ord(y)
(ii) Ord(ø)
(iii) Ord(x) –> Ord(xU{x})

Bevis: Ad (i): Vi viser først (1) at Connex(y). Anta z,wêy. Siden det følger fra forutsetningene at Trans(x) & xêy må z,wêx. Siden Ord(x) følger Connex(x). Man kan derfor slutte at zêw v z=w v wêz. Dette viser at (1) holder. Vi må dernest vise at (2) Trans(y). Fra forutsetningene følger (3) Trans(x) og dessuten (4) Connex(x). I tillegg følger (5) xêy. Anta nå for vilkårlige z,w at
(+) zêw & wêy. Fra dette, (3) og (5) følger yêx & zêx. Dette og (4) impliserer yêz v zêy v z=y. Vi kan nå skille mellom tre tilfeller.

Tilfelle (a): yêz. Da har man i lys av (+) at (6) zêw & yêzêw. Det finnes noe u slik at u = {z,w,y}. Men i lys av (6) følger da u≠ø & (Ap)(pêu –> pΩu≠ø). Dette strider mot fundierungsaksiomet. Dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle (b): z=y. I lys av (+) har man da (7) yêwêy. Ved hjelp av parmengdeaksiomet kan man slutte at det finnes q slik at q={w,y}. Men i lys av (7) har man da q≠ø & (As)(sêq –> sΩq≠ø). Også dette strider må fundierungs-aksiomet. Det følger at også dette tilfellet er utelukket. Det følger at zêy. Dette viser at (2) holder.

Ad (ii): Det er umiddelbart klart at Trans(ø) & Connex(ø). Det følger derfor at man må ha Ord(ø).

Ad (iii): Anta Ord(x). Man må vise at Trans(xU{x}). Anta derfor for vilkårlige y,z at yêzê(xU{x}). Er zêx har vi i lys av forutsetningen at yêx og følgelig at yê(xU{x}). Er z=x har vi umiddelbart at yêx Inkl xU{x}. Dette viser at xU{x} er transitiv. Det er også nødvendig å vise at Connex(xU{x}). Anta derfor for vilkårlige z,w at z,wê(xU{x}). Er z,wêx følger satsen fra forutsetningen om at Ord(x). Er zêx & wê{x} har man w=x. Da følger zêw og derfor også
zêw v z=w v wêz. På lignende vis ser man at zêw v w=z v wêz holder i det tilfelle at wêx & zê{x} og i det tilfelle at z,wê{x}. **Q.E.D.**

Ordinaltallene 0,1,2,3,..., n og etterfølger-relasjonen +1 mellom ordinaltallene innføres ved den følgende definisjon:

Definisjon 3.2 (i) $0=ø$
(ii) $1 = \{ø\}$
(iii) $2 = \{ø,\{ø\}\}$
(iv) $3 = \{0,1,2\}$
(v) $4 = \{0,1,2,3\}$
(vi) $n = \{0, \ldots , n-1\}$
(vii) $x+1 = xU\{x\}$

La oss så bevise den følgende lov om sammenligbarhet når det gjelder ordinaltallene:

Teorem 3.2 (ZFC) $Ord(x) \& Ord(y) \rightarrow (x\hat{e}y \vee x=y \vee y\hat{e}x)$

Bevis: Man bør først merke seg at man har:
(1) $Ord(x) \& Ord(y) \rightarrow Ord(x\Omega y)$. Dette følger umiddelbart fra defini-sjonen av ordinaltall. La oss i første omgang vise hvordan teoremet følger fra den følgende påstand:
(2) $Ord(x) \& Ord(y) \& x \text{ Inkl } y \& x\neq y \rightarrow x\hat{e}y$.
Anta $Ord(x) \& Ord(y)$ og dessuten at $x\Omega y\neq x$ og $x\Omega y\neq y$. I lys av (2) må man da ha $x\Omega y\hat{e}y$ & $x\Omega y\hat{e}x$ og derfor $x\Omega y\hat{e}(x\Omega y)$. Men dette strider mot fundierungsaksiomet. Derfor: $x\Omega y= x \vee x\Omega y = y$. I det første tilfellet har man
x Inkl y og derfor ved hjelp av (2) at $x=y \vee x\hat{e}y$. Da følger selvfølgelig det man ønsker, nemlig: $x\hat{e}y \vee x=y \vee y\hat{e}x$. I det andre tilfellet innser man på samme måte at satsen må holde. Det følger at det er tilstrekkelig å bevise (2). Anta derfor at $Ord(x) \& Ord(y) \& x \text{ Inkl } y \& x\neq y$. Det følger herav at $z= y–x$ er ikke-tom. I følge fundierungsaksiomet må det i så fall finnes u der (3) $u\hat{e}z$ og (4) $u\Omega z=ø$. Da har man (5) $u\hat{e}y \& \neg(u\hat{e}x)$. Men fra (4) følger (6) $(Av)(v\hat{e}y \&\neg(v\hat{e}x). \rightarrow \neg(v\hat{e}u))$. Fra (5) og det forhold at Trans(y) har man (7) $(Av)(v\hat{e}u \rightarrow v\hat{e}y)$. Dette og (6) impliserer (8) $(Av)(v\hat{e}u \rightarrow v\hat{e}x)$. Siden x Inkl y har man at $w\hat{e}y$ om $w\hat{e}x$. Siden Connex(y) har vi derfor i lys av (5) at $w\hat{e}u \vee w=u \vee u\hat{e}w$. Er $u\hat{e}w$ har vi, siden $w\hat{e}x$ og x er transitiv at $u\hat{e}x$. Dette strider mot (5). Dette tilfelle er derfor utelukket. Er $w=u$ har man også $u\hat{e}x$ om $w\hat{e}x$. Også dette strider mot (5). Det følger at $w\hat{e}u$. Vi har nå vist $(Aw)(w\hat{e}x \rightarrow w\hat{e}u)$. Sammen med (8) og ekstensjonalitetsaksiomet gir dette en x=u. Ved hjelp av (5) følger så $x\hat{e}y$. **Q.E.D.**

I det følgende skal vi bruke "a", "b", "c", "d", etc som variabeltegn som utelukkende tar ordinaltall som verdier. Vi skriver altså "(Aa)F(a)" istedet for "(Ax)(Ord(x) –> F(x)), "(Ea)F(a)" istedet for "(Ex)(Ord(x) &F(x)". Endelig bruker vi "Mg(a: F(a))" istedet for "Mg(x: Ord(x) & F(x))". Merk at dette utelukkende er en rent notasjonell konvensjon.

Definisjon 3.3(i) $Suc(x) \leftrightarrow (Ord(x) \& ((Ey)(x=y+1) \vee x=ø))$
(ii) $Lim(x) \leftrightarrow (Ord(x) \& \neg Suc(x))$
(iii) $Int(x) \leftrightarrow (Suc(x) \& (Ay)(y<x \rightarrow Suc(y)))$

"Suc(x)" betyr at x er et etterfølgerordinal. "Lim(x)" innebærer at limesordinaltall. "Int(x)" leses "x er et positivt helt tall" eller "x er et naturlig tall".

Teorem 3.3 (ZFC) $Lim(x) \leftrightarrow (Ord(x) \& x\neq 0 \& (Ay)(y\hat{e}x \rightarrow y+1\hat{e}x))$

Bevis: (a) Anta Lim(x) Da følger per definisjon at :

(1) Ord(x) & x≠0 & (Ay)(x≠y+1). Anta for reduktio ad absurdum at det finnes y slik at (2) yêx & ¬((y+1)êx). Fra (1) og (2) følger ved hjelp av Teorem 3.1 at Ord(y) & Ord(y+1). Da ha vi ved hjelp av Teorem 3.2 at

(y+1)êx v x=y+1 v xê(y+1)

I lys av (1) og (2) er det første og det andre tilfellet utelukket. Man må derfor ha xê(y+1). Men yêx. Følgelig yêxê(yu{y}). Men da har man enten yêxêy eller yêy. Begge deler er utelukket i lys av fundierungsaksiomet. (b) Anta på den annen side at (3) (Ord(x) & x≠0 & (Ay)(yêx –> y+1êx)). Anta for reduktio ad absurdum at x=(z+1) for noe z. Da har vi x= zU{z} og følgelig zêx. Fra dette og (3) følger (z+1)êx. Men det innebærer at zU{z}ê(zU{z}). Dette er igje umulig i lys av fundierungsaksiomet. **Q.E.D.**

Teorem 3.4 (ZFC) (Matematisk induksjon)

F(0) & (Aa)(F(a) –> F(a+1)) –> (Aa)(Int(a) –> F(a))

Bevis: Anta (+) F(0) & (Aa)(F(a) –> F(a+1)). Anta videre for reduktio ad absurdum at det finnes b slik at Int(b) & ¬F(b). Sett y = Mg(c: c≤ b &¬F(c)). Man har at y Inkl (b+1) derfor er y en mengde. Videre er y ikke-tom siden bêy. Ved hjelp av fundierungsaksiomet har da y et medlem c0 slik at c0 Ωy=ø. Man må selvfølgelig ha c0 ≤b. Siden Int(b) har vi da ifølge Definisjon 2.3 at

(1) Suc(b) & (Ay)(y<b –> Suc(y)) Er c;0=b har vi Suc(c0). Er c0<b har vi også ved hjelp av (1) at Suc(c0). I begge tilfelle følger (2) Suc(c0). Fra dette og Definisjon 3.3 kan man slutte at c0= c1+1 for noe c1 eller at c0=0. I det siste tilfelle har man siden c0êy at ¬F(c0) og derfor ¬(F(0)). Dette strider mot den første konjunkten i (+). I det andre tilfelle følger at c1êc0 og derfor siden c0Ωy=ø at ¬(c1êy). Det følger da at c1≤b –> F(c1). Men c1≤c0≤b. Derfor (3) F(c1). På den annen side har man c1+1=c0êy og derfor at (4) F(c1+1). (3) og (4) strider mot den andre konjunkten i (+). **Q.E.D.**

Teorem 3.5 (ZFC) (Ey)((Az)(zêy <–> Int(z))

Bevis: I lys av uendelighetsaksiomet finnes det en mengde w som er slik at

(1) 0êw & (Ax)(xêw –> (x+1)êw). Ved hjelp av Teorem 3.4 har man da (Ax)(Int(x) –> xêw). Påstanden følger så ved hjelp av utsondringsaksiomet. **Q.E.D.**

Definisjon 3.4 Ô = Mg(x: Int(x))

Ô er altså mengden av alle de naturlige tall i von Neumanns betydning. I lys av Teorem 3.5 er det klart at denne mengden eksisterer. Vi skal vise at Ô er et ordinaltall og det er et limesordinaltall. Det er derfor det minste uendelige ordinaltallet.

Teorem 3.6 (ZFC) Ord(Ô) & Lim(Ô)

Bevis: (a) For å vise at Ord(Ô) må man vise at Trans(Ô). Dette følger umiddelbart far definisjonen av Ô siden vi har

(1) (Ax)(Ay)(Int(x) & yêx –> Int(y)).

La oss vise at (1) holder: Anta for vilkårlige x,y at (2) Int(x) & yêx. Fra den første konjunkten her og Definisjon 3.3 følger: (3) Suc(x) & (Ay)(y<x –> Suc(y)). Vi tar sikte på å vise at: (+) Suc(y) & (Az)(z<y –> Suc(z)). Fra (2) følger yêx og derfor y<x. Dette og (3) impliserer (4) Suc(y). Anta z<y. Da følger etter definisjonen av < at zêy. Men yêx og x er en transitiv mengde siden x er et ordinaltall. Det følger at zêx og derfor z<x. Fra dette og (3)

slutter vi at Suc(z). Men z var et vilkårlig element der z<y. Det følger at (5) (Az)(z<y –> Suc(z)) Vi har nå vist (+). Dette viser at (1) holder.

Vi må imidlertid også vise at Connex(Ô) for å vise at Ord(Ô). Dette innebærer at vi må bevise (Ax)(Ay)(Int(x) & Int(y) –> xêy v x=y v yêx). Anta derfor Int(x) & Int(y). Ved hjelp av Definisjon 3.3 følger da at Ord(x) & Ord(y). Men fra dette og Teorem 3.2 har man xêy v x=y v yêx. Dette avslutter beviset for at Ord(Ô).

(b) Det er også nødvendig å bevise Lim(Ô). Siden Ord(Ô) er det i lys av Teorem 3.3 nok å vise (1) Ô≠ø & (Ay)(yêÔ –> y+1êÔ). Vi har at ø er et ordinaltall og derfor i lys av Definisjon 3.3 at Suc(ø). Videre skulle det være klart at (Ax)(x<ø –> Suc(x)) fordi antesedenten her er tomt sann. Det følger derfor at
øêMg(x: Int(x)) = Ô og derfor at Ô≠ø. For å vise den andre konjunkten i (1) er det tilstrekkelig å vise (2) (Ax)(Int(x) –> Int(x+1)). Anta derfor for vilkårlig x at
(3) Int(x). Fra definisjonen av Int følger da (4) Suc(x) & (Ay)(y<x –> Suc(y)). Vi må vise at (+) Suc(x+1) & (Ay)(y<x+1 –> Suc(y)). Dette vil være tilstrekkelig. La oss ta den andre konjunkten her først: Anta y<x+1. Da følger: yê(xU{x}). Da har vi enten yêx og i så fall må y<x. Ved hjelp av (4) har vi da Suc(y). Eller så er y=x og da har man ved hjelp av den første komponenten i (4) at Suc(y). Dette viser at den andre konjunkten i (4) holder. Vi må også vise at Suc(x+1). I lys av Definisjon 3.3 innebærer dette at det må godtgjøres at :

Ord(x+1) & ((Ey)(x+1 =y+1) v =ø)

Siden x+1= x+1 følger det at (Ey)(x+1 = y+1). Den andre konjunkten holder derfor. På den annen side følger fra (3) og Definisjon 3.3 at Ord(x). Fra dette og Teorem 3.1 følger Ord(x+1) siden x+1 per definisjon er xU{x}. Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Det vi så langt har gjort innebærer at vi nå kan så og si se begynnelsen av rekken av ordinaltallene: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... Ô, Ô+1, Ô+2, Ô+3,... .

§4 Om den transitive lukningen av en mengde.

Er x en mengde betegner "TC(x)" den transitive lukningen av x. Dette begrepet er definert slik:

Definisjon 4.1 TC(x) = Mg(y: (Az)(xêz & Trans(z) –> yêz))

TC(x) er altså den minste transitive mengden som inneholder x. Den vil derfor inneholde x, alle elementer av x, alle de ting som er elementer i elementer i x, osv. Det er ikke uten videre klart at TC(x) eksisterer. Det følgende teorem godtgjør eksistensen av TC(x) for enhver mengde x:

Teorem 4.1 (ZFC) (Ax)(Ew)((Ay)(yêw <–> (Az)(xêz & Trans(z) –> yêz)))

Bevis: Definer E(n,x,y) ved:

(1) E(n,x,y) <–> (Ef)(Func(f) & Dom(f) = n+1 & f(0)=x & f(n)=y) & (Am)(m<n –> f(m)êf(m+1)))

Litt uformelt kan man si at E(n,x,y) holder hvis og bare hvis man har at x=f(0)ê f(1)êf(2)ê .... êf(n)=y. Merk at hvis det finnes mengder y;0,...,y;n slik at x=y;0êy;1ê ... êy;n=y så vil den funksjonen som er slik at f(m)=y;m for m=0,..,n eksistere i kraft av parmengde og foreningsmengde aksiomet. Vi vil gjøre stilltiende bruk av eksistens-setninger av denne typen.

Satsen bevises ved å vise at w=Mg(y: (En)(n<Ô &E(n,y,x))) er en mengde, at den er transistiv og at den er den minste transitive mengden som inneholder x. For å vise at w er

transitiv anta at zêy & yêw for vilkårlige z,y. Da finnes n<Ô slik at E(n,y,x). Men da har vi i lys av bemerkningene ovenfor at E(n+1,z,x) og følgelig at zêw. Sett w;n = Mg(y: E(n,y,x)). Da har man at (1) w;0 = {x} og dessuten at (2) (An)(n<Ô –> w;(n+1) = UN(w;n)). I forbindelse med (2) kan man bemerke at

zêw;(n+1) <–> E(n+1,z,x)
<–> (Ey)(zêy & E(n,y,x))
<–> (Ey)(zêy & yêw;n) <–> zêUN(w;n)).

Nå er det åpenbart at w;0 er en mengde. Videre må w;(n+1) = UN(w,n) være en mengde om w;n er det i kraft av foreningsmengdeaksiomet. Ved induksjon følger derfor at (An)(n<Ô –> (Ez)(z= w;n)). Sett W= Mg(w;n: n<Ô). W er en mengde i lys av replacementaksiomet. Men w = UN(W). Det følger derfor at w må eksistere i lys av foreningsmengdeaksiomet.

Tilslutt må vi vise at dersom xêz & Trans(z) så er w Inkl z. Siden w=UN/n<Ô/(w;n) vil det være tilstrekkelig å bevise at

(3) (An)(n<Ô –> w;n Inkl z). Dette vises ved induksjon på n.

(i) Er sêw;0. Siden w;0={x} innebærer dette at s=x. Nå er xêz & Trans(z). Men da har man sêz. Det følger at w;0 Inkl z. (ii) Anta w;n Inkl z for noe n. Vi skal vise at w;(n+1) Inkl z. Anta derfor sêw;(n+1) for vilkårlig s. sêw;(n+1) innebærer at E(n+1,s,x). Dette i sin tur innebærer at det finnes y slik at sêy &E(n,y,x). Dette impliserer at sêy & yêw;n. Men da har vi ved hjelp av induksjonshypotesen at yêz. Men siden z er transistiv og sêy følger da at sêz. Dette viser w;(n+1) Inkl z.

Dette avslutter vårt bevis for satsen. **Q.E.D.**

Det neste vi skal gjøre er å bevise et teorem som sier at dersom x er en ikke-tom mengde med ordinaltall så er UN(x) den minste øvre grensen for x og SN(x) den største nedre grensen.

Teorem 4.2 (ZFC)
(i) (Ay)(yêx –> Ord(y)) –> Ord(UN(x))
(ii) (Ay)(yêx –> Ord(y)) –> (Az)(zêx –> z≤ UN(x))
(iii) (Ay)(yêx –> Ord(y)) –>
((Ay)(Ord(y) & (Az)(zêx –> z≤y). –> UN(x)≤y)
(iv) (Ay)(yêx –> Ord(y)) & x≠ø –> Ord(SN(x))
(v) (Az)(zêx –> Ord(z)) –> (Ay)(yêx –> SN(x) ≤y)
(vi) Ord(x) & Ord(y) & xêy –> x Inkl y
(vii) (Az)(zêx –> Ord(z)) & x≠ø –> SN(x) êx
(viii) (Az)(zêx –> Ord(z)) & x≠ø –>
(Ord(y) &(Az)(zêx –> y≤z). –> y ≤ SN(x))

Bevis: Ad (i): Det er nødvendig å bevise at Trans(UN(x)). Anta derfor zêy &yêUN(x). Da finnes det w slik at zêy & yêw & wêx. Ifølge forutsetningen har man Ord(w) og derfor Trans(w). Det følger at zêw & wêx. Men da zêUN(x). Man må også bevise at Connex(UN(x)). Anta derfor for vilkårlige y,w at y,wêUN(x). Da finnes et a,b der (1) yêaêx & wêbêx. I lys av forutsetningen må vi åpenbart ha Ord(a) & Ord(b) og følgelig i lys av sammenlignbarhetsloven, Teorem 3.2, at

(2) aêb v a=b v bêa. Er aêb har man fra (1) og det forhold at b er transitiv at y,wêb. Siden Ord(b) følger da Connex(b) og derfor yêw v y=w v wêy som er det man ønsker. Er a=b har man umiddelbart i lys av (1) at y,wêb og derfor fordi Connex(b) at yêw v y=w vwêy. Er endelig bêa har man ved hjelp av (1) og det forhold at Trans(a) at y,wêa. Siden Ord(a) følger Connex(a) og derfor
yêw v y=w v wêy som er det vi ønsker. Dette viser at Connex(UN(x)).

Ad (ii): Anta zêx for vilkårlig z. Fra forutsetningen har man da Ord(z). I lys av resultatet under (i) har man Ord(UN(x)). Fra sammenligningsloven følger da zêUN(x) v z=

UN(x) v UN(x)êz. Det er nå tilstrekkelig å vise at det siste tilfellet leder til en motsigelse. Siden zêx har man z Inkl UN(x) og følgelig at zΩUN(x) = z. Er da UN(x)êz følger UN(x)êUN(x). Men dette er umulig i lys av fundierungsaksiomet.

Ad (iii): Anta (1) Ord(y) & (Az)(zêx –> z≤y) i tillegg til forutsetningen og anta dessuten for reduktio ad absurdum at y< UN(x). Fra det siste følger yêUN(x) og derfor at det må finnes noe w slik at yêw & wêx. Fra dette og (1) følger w≤y. Dette innebærer at wêy v w=y. I det første tilfelle må vi ha wêyêw. Dette strider mot fundierungsaksiomet. I det andre tilfellet har man yêy, oe som også åpenbart strider mot fundierungsaksiomet.

Ad (iv): Anta (Ay)(yêx –> Ord(y)) & x≠ø. Vi må vise at Trans(SN(x)). Anta derfor at (1) zêyêSN(x). Da har man (2) (Aw)(wêx –> yêw) Anta nå at w er et vilkårlig element der (3) wêx. Da har man Ord(w) og derfor Trans(w). Fra (2) og (3) følger yêw. Fra dette og (1) kan man slutte zêyêw. Men siden Trans(w) kan man da konkludere med at zêw. Vi har altså vist, siden w var vilkårlig, at (Aw)(wêx –> zêw). Dette innebærer at zêSN(x). Dette viser at SN(x) er transitiv. Det er også nødvendig å vise at Connex(SN(x)). Anta derfor z,wêSN(x). Da følger at (Aq)(qêx –> z,wêq). Siden x≠ø har man z,wêq & Ord(q) for noe q. Men da følger Ord(z) & Ord(w) ved hjelp av Teorem 3.1 og derfor zêw v z=w v wêz ved hjelp av sammenlignbarhetsloven, Teorem 3.2.

Ad (v): Anta (Az)(zêx –> Ord(z)) og yêx. Anta for reduktio ad absurdum at y <SN(x). Det følger da at yêSN(x) og derfor at (Aw)(wêx –> yêw). Men siden yêx må man i så fall ha yêy. Dette er umulig i lys av fundierungsaksiomet.

Ad (vi): Dette punkt er trivielt og følger umiddelbart fra det faktum at Trans(y) siden man har at Ord(y).

Ad(vii): Anta (1) (Az)(zêx –> Ord(z)) & x≠ø. I lys av resultatet under punkt (v) har man da at (2) (Ay)(yêx –> SN(x)≤y). Herav følger:

(3) (Az)(zêx –> (SN(x)êz v SN(x) =z)). Fra (1) følger ved hjelp av fundierungsaksiomet at det finnes noe y;0 som er slik at:

(4) Ord(y;0) & y;0êx & y;0Ωx = ø.

Fra (3) og (4) følger (5) SN(x) = y;0 v SN(x)êy;0. Er SN(x) = y;0 har man i lys av (4) at SN(x)êx som er det vi ønsker. Vi er ferdige om vi kan vise at SN(x)êy;0 leder til en motsigelse. Anta derfor (6) SN(x)êy;0. Anta r er et vilkårlig element der rêx. Da følger det at Ord(r) ved hjelp av (1) og derfor i lys av (4) at

y;0êr v y;0=r v rêy;0. Man kan ikke ha rêy;0 i lys av den siste konjunkten i (4). Derfor: y;0êr v y;0=r. Fra dette, (6) samt det faktum at Trans(r) følger at SN(x)êr. Men r var et vilkårlig element hvor rêx. Det følger at vi har bevist:
(Ar)(rêx –> SN(x)êr). Herav SN(x)êSN(x). Men dette strider mot fundierungsaksiomet.

Ad(viii): Anta (0) (Az)(zêx –> Ord(z)) & x≠ø og anta videre, for reduktio ad absurdum, at: (1) Ord(y) &(Az)(zêx –> y≤z) & SN(x) <y. I lys av (0) og det som ble bevist under forrige punkt har man at SN(x)êx. Fra dette og den andre konjunkten i (1) følger y≤SN(x). Det følger at SN(x)< y ≤ SN(x) og derfor at SN(x)êSN(x). Dette strider mot fundierungsaksiomet.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 4.2. **Q.E.D.**

Definisjon 4.2(i) Sup(x) = UN(x)
(ii) Inf(x) = SN(x)

"Sup(x)" leses "Supremum til x", "Inf(x)" leses "Infimum til x". Sup(x) er altså den minste øvre grense til x og Inf(x) den største nedere grensen til x. Det foregående teorem viser at disse definisjonene er berettiget.

La oss så gi bevis for:

Teorem 4.3 (ZFC) (i) Lim(a) <–> a=Sup(a) & a≠0
(ii) (Aa)(a= Sup(a+1))
(iii) Suc(a) <–> (a= (Sup(a)+1) v a=0)

Bevis: Ad (i): Anta Lim(a). Da a≠0 & (Ay)(yêa –> (y+1êa). Det følger at det finnes x der xêa. Da har man xU{x}êa. Videre følger at xê(xU{x}) êa. Dette innebærer at xêUN(a) Inkl a. Fra dette kan man slutte at a= Un(a) og a≠0. Man har derfor a=Sup(a) & a≠0. Anta på den annen side at a=Sup(a) & a≠0. Anta for vilkårlig y at yêa. I lys av definisjonen av Lim(a) vil det være tilstrekkelig å bevise at (y+1)êa. Fra det at yêa følger at yêUN(a) siden a= Sup(a)=UN(a). Herav kan man slutte (1) yêzêa for noe z. Man må ha at Ord(y) & Ord(z) siden a er et ordinaltall. Følgelig har man Ord(yU{y}). Ved hjelp av sammenligningsloven kan man da slutte:

zê(yU{y}) v z = (yU{y}) v (yU{y})êz. Den første av disse tre mulighetene er utelukket i lys av (1) og fundierungsaksiomet. Er z= (yU{y}) har man siden zêa at y+1=(yU{y})êa som er det man ønsker. Er (yU{y})êz følger at

(yU{y})êzêa. Men siden a er et ordinaltall er a transitiv. Vi kan derfor også i dette tilfellet slutte at y+1=(yU{y})êa. Dette viser at (i) holder.

Ad (ii): Man har Sup(a+1) = UN(aU{a}) = UN(a)UN({a}) = UN(a)Ua. Siden Ord(a) har man Trans(a) og derfor UN(a) Inkl a. Følgelig a=UN(a)Ua. Men da a=Sup(a+1).

Ad (iii): Anta Suc(a). Da har man om a≠0 at a=y+1 for noe y. Nå må man ha Ord(y). Følgelig har vi i lys av hva som ble bevist under (ii) at:

y= UN(y+1) = UN(a) = Sup(a). Men da kan man slutte a= Sup(a)+1.

Anta på den annen side at a=Sup(a+1) v a=0. Da (Ey)(a=y+1) v a=0. Fra definisjonen av Suc(a) følger da at Suc(a).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 4.3. **Q.E.D.**

Teorem 4.4 (ZFC) ¬(Ey)((Ax)(xêy <–> Ord(x))

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at (0) (Ey)((Ax)(xêy <–> Ord(x)). Da har man at det finnes noe a slik at (1) (Ax)(xêa <–> Ord(x)). Anta nå at xêyêa for vilkårlige x og y. Da har man i lys av (i) at Ord(y) og følgelig Ord(x). Ved hjelp av (1) kan man da slutte xêa. Det følger at a er transitiv ie. (2) Trans(a).

Anta nå at z,wêa. Da har man i lys av (1) at Ord(z) & Ord(w). Fra dette og sammenlignbarhetsloven for ordinaltall følger zêw v z=w v wêz. Det følger herav at (3) Connex(a). Fra (2) og (3) kan man slutte at Ord(a). Men fra dette og (1) følger at aêa. Dette er utelukket i lys av fundierungsaksiomet. Det følger at (0) er gal. **Q.E.D.**

Fra Teorem 4.4 følger det at "Mg(x: Ord(x))" ikke er noen legitim mengdeteoretisk term i den forstand at den betegner et objekt som eksisterer. Med andre ord er det slik at klassen av alle ordinaltall ikke eksisterer. Vi bemerker at dette er intuitivt sett hva man burde forvente om man har det mengdebegrepet som representeres av det kumulative hierarkiet i tankene.

Definisjon 4.3Q(z,y) <–> (Eu)(Ev)(zê(u–v) & (zΩ(u–v))= ø &
z SInkl v & v,uêy)

Poenget med denne definisjonen fremgår av de følgende hjepesetninger:

Lemma 4.1 (ZFC) (i) Trans(y) & (Az)(zêy –> Trans(z)) –>.
(Ax)(Q(x,y) –> (Ez)(zêx & Q(z,y)))

(ii) Trans(y) & (Az)(zêy –> Trans(y)) –> ¬(Ev)(Q(v,y))

Bevis: Ad (ii): Vi beviser først at (ii) er en konsekves av (i). Anta
(1) Trans(y) & (Az)(zêy –> Trans(z)). Fra (1) og Definisjon 4.3 følger (Av)(Q(v,y) –> vêy). Derfor har man (Av)((vêy & Q(v,y)) <–> Q(v,y)). I lys av utsondringsaksiomet følger derfor eksistensen av noe v slik at:
(2) (Ax)(xêv <–> Q(x,y)). Dette, (1) og punkt (i) impliserer imidlertid at (Az)(zêv –> (Ey)(yêz & yêv)). I lys av fundierungsaksiomet må man da ha v=ø. I lys av (2) innebærer dette at ¬(Ev)(Q(v,y)).
Ad (i): Anta (1) Trans(y) & (Az)(zêy –> Trans(z)). og dessuten (2) Q(v;2,y) for vilkårlig v;2. Fra (2) og Definisjon 4.3 følger eksistensen av u,v;1 der man har:
(3) v;2ê(u–v;1) & v;2Ω(u–v;1)=ø & v;2 SInkl v;1 & v;1,uêy.
Ved hjelp av den tredje konjunkten her og fundierungsaksiomet må man ha at det finnes v;3 som er slik at:
(4) v;3ê(v;1–v;2) & v;3Ω(v;1–v;2) = ø.
Fra (1) og (3) bemerker vi at det følger at (5) Trans(v;1). Fra (4) har man:
(7) (Ax)(xêv;3 & x;êv;1 –> xêv;2) & v;3êv;1. Er derfor xêv;3 har man i lys av (5) og (7) at xêv;2. Følgelig (8) v;3 Inkl v;2. v;3= v;2 strider imidlertid mot (3) og (4). Derfor har man: (9) v;3 SInkl v;2. da har man, igjen ved å benytte fundierungsaksiomet at det finnes z slik at :
(10) zê(v;2–v;3) & zΩ(v;2 –v;3) = ø. Vi harv;2êuêy og derfor i lys av (1) at
(11) Trans(v;2). Fra (10) følger (12) (As)(sêz & sêv;2 –> sêv;3). Antar vi for vilkårlig w at wêz har vi wêzêv;2 og derfor sammen med (11) at wêv;2. I lys av (12) har vi følgelig wêv;3. Det følger at (13) z Inkl v;3. Men z≠v;3 i lys av (10) og (4). Derfor (14) z SInkl v;3. Nå har man v;2 êuêy og derfor ved hjelp av (1) at
(15) v;2êy. Videre har vi v;3êv;1êy og derfor, også ved hjelp av (1), at
(16) v;3êy. Fra (10), (14), (15) og (16) følger Q(z,y) & zêv;2. Det følger selvfølgelig at (Ez)(Q(z,y) & zêv;2). Men v;2 var et vilkårlig objekt som oppfylte (2). Derfor:
(Ax)(Q(x,y) –> (Ez)(zêx & Q(z,y)). Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

Vi trenger også det følgende lemma:

Lemma 4.2 (ZFC) [x,yêz & Trans(z) &(Aw)(wêz –> Trans(w)) &
x SInkl y]–> xêy

Bevis: Anta (1) x,yêz & Trans(z) &(Aw)(wêz –> Trans(w)). Anta dessuten
(2) x SInkl y. Fra (2) må man ha ved hjelp av fundierungsaksiomet at det finnes u der (3) uê(y–x) & uΩ(y–x)=ø. Fra (1) følger (4) Trans(y). Fra (3) har vi
(5) (Az)(zêu 6 zêy –> zêx). Fra dette, (3) og (4) følger så: (6) u Inkl x. Anta nå for reduktio ad absurdum at x≠u. Da har man (7) u SInkl x i lys av (6). Fra (1), (3) og (7) følger da (8) Q(u,z) og derfor (Ev)(Q(v,z)). Men dette og (1) strider mot punkt (ii) i Lemma 4.1. Derfor x=u. Men fra dette og xêy. **Q.E.D.**

Vi ønsker nå å bevise en hjelpesetning som er sterkere en Lemma 2. Men først gir vi den følgende definisjon:

Definisjon 4.4 Tr(x) <–> (Trans(x) & (Ay)(yêx –> Trans(y)))

Satsen kan da formuleres slik:

Lemma 4.3 (ZFC) Tr(x) & Tr(y) & x SInkl y. –> xêy

Bevis: Fra den tredje forutsetningen og fundierungsaksiomet følger eksistensen av u slik at (1) uê(y–x) & uΩ(y–x)=ø. Herav: (2) (Az)(zêu & zêy –> zêx). Antar man zêu så har man zêuêy, og følgelig, i kraft av den andre forutsetningen i teoremet, at zêy & zêu. I lys av (2) følger da zêx. Man må altså ha: (3) u Inkl x. Anta nå for reduktio ad absurdum at (4) u≠x. Da har man i lys av (3) at
(5) u SInkl x. Ved hjelp av fundierungsaksiomet finnes da v;2 slik at:
(6) v:2ê(x–u) & v:2Ω(x–u) = ø. Siden uêy må man ha Trans(u). Følgelig har vi fra (6) – forøvrig på samme måte som ovenfor – at v;2 Inkl u. Nå strider v;2=u mot (1) og (6). Derfor v;2 SInkl u. Da må man igjen i lys av fundierungs-aksiomet ha at det finnes v;3 der: (8) v;3ê(u–v;2) & v;3Ω(u–v;2) = ø. På samme måte som tidligere finner man at v;3 Inkl v;2. Men er v;3=v;2 strider dette mot (6) og (8). Derfor: (9) v;3 SInkl v;2. Nå er v;3êuêy. Man har derfor, siden Trans(y), at v;3êy. Videre har man v;2êx SInkl y. Derfor v;2êy. Det må også være slik at uêy. Følgelig: (11) v;2,uêy. Fra (8). (9) og (11) fremgår det at (Ez)Q(z,y). Men dette strider mot Tr(y) i lys av punkt (ii) i Lemma 4.1. Det følger at (4) leder til en motsigelse og at vi derfor har u=x. Fra dette og (1) følger åpenbart xêy.
Q.E.D.

Den følgende sats skulle være opplagt:

Lemma 4.4 (ZFC) (i) Tr(x) & yêx. –> Tr(y)
(ii) Tr(x) & Tr(y) –> Tr(xΩy)

Vi overlater beviset for denne påstanden til leseren.
La oss så gi bevis for:

Lemma 4.5 (ZFC) Tr(z) –> Connex(z)

Bevis: Anta (1) Tr(z) & x,yêz. Da har man ved hjelp av Lemma 4.4 at
(2) Tr(x) & Tr(y) & Tr(xΩy). Anta nå for reduktio ad absurdum at
xΩy≠x & xΩy≠y. Da har man xΩy SInkl x & xΩy SInkl y. I lys av Lemma 4.3 og Lemma 4.4 følger da (xΩy)êx & (xΩy)êy. Følgelig har man (xΩy)ê(xΩy) som er umulig i lys av fundierungsaksiomet. Det følger at:
(3) (xΩy) = x v (xΩy) = y. I det første tilfelle har man x Inkl y og derfor ved hjelp av (2) og Lemma 4.3 at xêy v x=y. I det andre tilfellet har man helt tilsvarende at yêx v x=y. I alle tilfelle har man da xêy v x=y v yêx. Dette viser at Connex(z). **Q.E.D.**

Som en umiddelbar konsekvens av Lemma 4.5 har man:

Teorem 4.5 (ZFC) Ord(z) <–> Tr(z)

Dette teoremet er interessant fordi det viser at man kunne ha definert Ord(x) på en noe annen måte enn vi faktisk har gjort.
La oss også bemerke at Lemma 4.2 følger fra Lemma 4.3 og Lemma 4.4.

§5 Transfinit induksjon.

I denne paragrafen skal vi ta opp det viktige emnet transfinit induksjon. Definisjoner gitt ved transfinit induksjon er vesentlige i en lang rekke sammenhenger.

Vi starter med den følgende definisjon:

Definisjon 5.1 Wf(F(x,y)) <–>
(Ax)[(Ev)(x≠ø –> (vêx & (Az)(zêx –> ¬F(z,v)))) &
(Eu)(x Inkl u & (Aw)(Ay)(wêu & F(y,w) –> yêu))]

Wf(F(x,y)) innebærer at F er en fundert relasjon. Den første konjunkten sier at enhver ikke-tom mengde inneholder F-minimale elementer – det behøver ikke bare være ett slikt element –, den andre konjunkten sier at enhver mengde kan utvides til en som er F-lukket.

Teorem 5.1 (ZFC) Wf(x<y) & Wf(xêy).

Bevis: I begge tilfelle er den første konjunkten en reformulering av fundierungsaksiomet og den andre konjunkten følger fra Teorem 4.1 siden TC(x) vil ha de egenskapene som kreves av u. **Q.E.D.**

Teorem 5.2 (ZFC) Wf(F(x,y)) & (Ay)((Az)(F(z,y) –> G(z)) –> G(y)). –> (Ax)G(x)

Bevis: Vi antar at (Ax)G(x) er usann og at Wf(F(x,y)) er sann og finner en v;0 slik at (Az)(F(z,v;0) –> G(z)) & ¬G(v;0). Dette strider mot den andre forut-setningen.

Anta (1) ¬G(v) for noe v. I følge den andre konjunkten i den første forutsetningen kan {v} utvides til en F-lukket mengde. Dette innebærer at:

(2) vêu & (Az)(zêu –> (Aw)(F(w,z) –> wêu))

Sett u' = Mg(z: zêu &¬G(z)). Da har man u'≠ø siden vêu'. I lys av den første konjunkten i den første hypotesen finnes det da et element z slik at slik at:

(3) zêu' & (Aw)(wêu' –> ¬F(w,z)). Dette er ekvivalent med:

(4) zêu' & (Aw)(F(w,z) –> ¬(wêu')). Fra dette og definisjonen av u' følger: (5) ¬G(z) & (Aw)(F(w,z) –> (wêu –> G(w))). Fra (4) og definisjonen av u' følger zêu. Fra dette og (2) følger at (Aw)(F(w,z) –> wêu). Fra dette og (5) har man så at ¬G(z) & (Aw)(F(w,z) –> G(w)). Dermed har vi "produsert" den motsigelsen vi ønsket. **Q.E.D.**

Definisjon 5.2 Hvis G(x;1,...,x;n,y) er en formel som i det minste har x;1,...,x;n og y som fri variabler så setter vi:

G*<x,1,...,x;n> = Mg(z: (Ey)((Aw)(G(x;1,...,x;n,w) <–> y=w) &zêy))

Vi har også bruk for den følgende definisjon:

Definisjon 5.3 Hvis F(x;1,...,;n,y) er en formel der x;1,..,x;n,y forekommer fri og H(x,y) er en formel der minst x,y forekommer fri så setter vi:

(i) H:-1"{y} = Mg(x: H(x,y))

(ii) Rest(F, H:-1"{y}) = Mg(<<x;1,...,x;n>, F*<x;1,...,x;n>>: H(x;1,y))

Det er så nødvendig å bevise den følgende sats:

Teorem 5.3 (ZFC) (i) Wf(H(x,y)) –> (Ay)((Ez)(z= H:-1"{y}))
(ii) Wf(H(x,y)) –> (Ay)((Ez)(z = Rest(F,H;-1"{y})))

Med andre ord er det slik at Wf(H(x,y)) så er H:-1"{y} en legitim term, dvs. uttrykket betegner en mengde og det samme gjelder Rest(F,H;-1"{y}).

Bevis: Ad (i): Anta Wf(H(x,y)). Da har vi, siden {y}≠ ø at det finnes u som er slik at yêu & (Az)(Aw)(wêu & H(z,w) –> zêu). Fra dette følger:

(Az)(H(z,y) –> zêu). Men dette er ekvivalent med:

(Az)((zêu & H(z,y)) <–> H(z,y)). Ved hjelp av utsondringsaksiomet må det da finnes en s slik at (Az)(zês <–> H(z,y)). I lys av definisjonen av "H:-1"{y}" innebærer dette at (Ez)(z = H:-1"{y}).

Ad (ii): I følge punkt (i) må det finnes s der: (Ax)(xês <–> H(s,y)). Sett per definisjon:

D(x;1,z) <–> z= <<x;1,....,x;n>, F*<x;1,...,x;n>>. Da har man åpenbart: D(x;1,z) & D(x;1,w) –> z=w for alle z,w. Ved hjelp av substitusjonsaksiomet har man da at det må finnes noe t slik at:

(Az)(zêt <–> (Ex;1)(x;1ês & z = <<x;1,...,x;n>, F*<x;1,...,x;n>>)). Men det følger da at (Ez)(z= Rest(F,H;-1"{y})). "Rest(F,H;-1"{y})" er altså en legitim mengdeteoretisk term. **Q.E.D.**

De satsene vi nå har samlet sammen gir en et grunnlag for å ta fatt på det følgende viktige rekursjonsteorem:

Teorem 5.4 For alle formler G(x,x;1,...,x;n,y) og H(x,y) finnes det en formel F(x;1,...,x;n,y) slik at den følgende formel er et teorem i ZF:

Wf(H(x,y)) –> (Ax;1)((E!y)(F(x;1,...,x;n,y) &
F(x;1,...,x;n,y) <–> y= G*<Rest(F,H;-1"{y}),x;1,...,x;n>))

Merk at dette er et metateorem i ZF. For å kunne bevise teoremet trenger vi det følgende hjelpebegrep, samt to hjelpesetninger:

Definisjon 5.4 Good(g) <–> [Func(g) & (Aw)(Au)(wêDom(g) & H(u,w) –> uêDom(g)) & (Aw)(wêDom(g) –> g(w) = G*<Rest(g ,H;-1"{w}),w,x;2,...,x;n>)]

Funksjoner g der man har at Good(g) er med andre ord funksjoner der dommenet er H-lukket og som – så langt de rekker – oppfyller kravene som vi ønsker at F i teoremet skal oppfylle.

To hjelpesetninger vil nå gjøre det relativt lett å bevise Teorem 5.4. Den første hjelpesetningen er denne:

Lemma 5.1 Wf(H(x,y)) & Good(g;1) & Good(g;2) &
wêDom(g;1)ΩDom(g;2). –> g;1(w) = g;2(w)

Bevis: Beviset utføres ved "H-induksjon på w": Anta:

(1) (Au)(H(u,w) –> g;1(u) = g;2(u))

(2) wêDom(g;1)ΩDom(g;2)

Fra (1) og (2) følger:

(3) Rest(g;1,H;-1"{w}) = Rest(g;2,H;-1"{w}). Men da må man ha:

(4) G*<Rest(g;1 ,H;-1"{w}),w,x;2,...,x;n>) =
G*<Rest(g;2 ,H;-1"{w}),w,x;2,...,x;n>)

Men dette innebærer at g;1(w) = g;2(w). **Q.E.D.**

Lemma 5.2 Wf(H(x,y)) –> (Ax)(Eg)(Good(g) & xêDom(g))

Bevis: Beviset går ved H-induksjon på x. Man antar at:

(1) (Au)(H(u,x) –> (Eg)(Good(g) & uêDom(g))). Det man så ønsker å bevise vil da være (Eg)(Good(g) & xêDom(g)). Vi må derfor konstruere en slik g. Siden vi antar at Wf(H(x,y)) følger det at det finnes en u som er slik at:

(2) xêu & (Az)(Aw)(wêu & H(z,w) –> zêu)

Sett Δ = Mg(g: Good(g) & Dom(g) Inkl u). La oss først vise at Δ er en mengde. Sett: y= Mg(v: (Ew)(Eg)(Good(g) & wêu & g(w)=v)). Da er y en mengde i lys av Lemma 5.1 og substitusjonsaksiomet. Men gêΔ –> g Inkl uXy. Derfor må man ha at Δ Inkl Pt(uXy). Δ må følgelig være en mengde, dvs. (Ez)(z=Δ).

Set nå g;0 = UN(Δ). I kraft av Lemma 5.1 må g;0 være en funksjon. Er wêDom(g;0) så er wêDom(g) for noen gêΔ og derfor (Au)(H(u,w) –> uêDom(g)). Det følger fra dette at (Au)(H(u,w) –> uêDom(g;0)). Dom(g;0) er altså H-lukket. Ved atter å bruke Lemma 5.1 ser man at:

g;0 = G*<Rest(g;0, H:-1"{w}),w, x;2,...,x;n>. Fra dette fremgår det at man har Good(g;0).

Man kan nå se at g;0 er definert for alle H-forgjengerene til x. For anta H(z,x). Da er zêDom(g) & Good(g) for noe g. Vi har at

Good(g) –> Good(Rest(g,u)) siden u er H-lukket. Videre må man ha Rest(g,u)êΔ & zêDom(Rest(g,u)). Det følger derfor at zêDom(g;0). La oss følgelig definere g;1 ved:

g;1 = g;0U {<x,G*<Rest(g;0,H;-1"{x},x,x;2,...,x;n>>}. Da må man ha at Good(g;1) & xêDom(g;1). Dermed er hjelpesetningen bevist. **Q.E.D.**

Ved hjelp av disse to hjelpesetningene kan man nå føre et bevis for Teorem 5.4:

Bevis for Teorem 5.4: La oss anta G(x,x;1,...,x;n,y) og H(x,y) er formler og at Wf(H(x,y)). La oss så sette:

(1) F(x;1,...,x;n,y) <–> (Eg)(Good(g) & x;1êDom(g) & g(x;1) =y).

Vi må nå bevise to ting:

(a) (Ax;1)(E!y)(F(x;1,...,x;n,y))

(b) (Ax;1)(F(x;1,...,x;n,y) <–> y = G*<Rest(F,H;-1"{x;1}),x;1,...,x;n>)

Ad (a): La x;1 være et vilkårlig objekt. I følge Lemma 5.2 finnes g slik at Good(g) & x;1êDom(g). Da har vi g(x;1) = g(x;1) og følgelig F(x;1,...,x;n,g(x;1)). Anta F(x;1,...,x;n,y;1) og F(x;1,...,x;n,y;2) Da må det i følge (1) finnes g;1 og g;2 slik at:

Good(g;1) & x;1êDom(g;1) & g;1(x;1) =y;1 og

Good(g;2) & x;1êDom(g;2) & g;2(x;1) =y;2

Ved hjelp av Lemma 5.1 følger y;1 = y;2.

Ad (b): Anta x;1 er et vilkårlig objekt. Vi tar først for oss kondisjonalen mot venstre i (b). Anta (2) y= G*<Rest(F,H;-1"{x;1}),x;1,...,x;n>. I lys av Lemma 5.2 må det finnes en g der Good(g) & x;1êDom(g). Siden x;1êDom(g) og man fra Good(g) kan slutte at Func(g), følger det at g(x;1)=z for noe z. Fra dette og (1) følger det at (3) F*(x;1,...,x;n)=z. Siden Good(g) følger det også fra definisjonen av Good at:

(4) z = G*<Rest(g,H;-1"{x;1}),x;1,...,x;n>

Anta nå r er et vilkårlig objekt der H(r,x;1). Da har vi i lys av definisjonen av Good(g) at rêDom(g). Fra dette og (1) følger det at F*(r,x;2,...,x;n) = g(r). Det følger fra dette at Rest(F,H;-1"{x;1}) = Rest(g,H;-1{x;1}). Fra dette, (2), (3) og (4) følger F(x;1,...,x;n,y). Dette viser at kondisjonale mot venstre holder i (b). Kondisjonalen mot høyre i (b) vises på en tilsvarende måte. Vi overlater dette til leseren. **Q.E.D.**

Teorem 5.4 er et svært nyttig teorem fordi det utgjør grunnlaget for alle definisjoner ved transfinit induksjon. Vi skal se på to anvendelser nemlig definisjonen av rangen til en mengde og definisjonen av det kumulative mengdehierarki.

Vi starter med rangen til en mengde. I denne forbindelse gjøres det oppmerksom på at "Rang(x)" leses "Rangen til mengden x". Intuitivt er rangen til en mengde x det minste ordinaltallet a hvor det er slik at x er med blandt alle mengdene på nivå a. La oss først definere:

G(X,x,y) <–> y = UN(Mg(z+1: zêRgn(X)))

Da må vi i lys av Teorem 5.4 ha at det finnes en formel F(x,y) slik at om vi setter H(x,y) <–> xêy så har man:

(1) F*(x) = G*<Rest(F*,H:-1"{x}),x)
= G*<Rest(F*, Mg(w: wêx)),x)
= UN(Mg(z+1: zêRgn(Rest(F*,Mg(w: wêx)))))
= UN(Mg(s: (Ez)(s= z+1 & (Ey)(<y,z>êRest(F*,Mg(w: wêx))))))
= UN(Mg(s: (Ey)(s = F*(y)+1 & yêx)))
= UN(Mg(F*(y)+1: yêx))

(1) viser at man kunne ha definert Rang(x) på den følgende måte siden Wf(xêy):

(2) Rang(x) = UN(Mg(Rang(y)+1: yêx))

La oss gi bevis for det følgende teorem:

Teorem 5.5 (ZFC) (i) (Ax)(Ord(Rang(x))
(ii) (Aa)(a = Rang(a))
(iii) (Ax)(Ay)(xêy –> Rang(x) < Rang(y))

Bevis: Ad (i): Det bevises ved induksjon på ê-relasjonen. Anta:

(0) (Ay)(yêx –> Ord(Rang(y))). Sett Q = Mg(Rang(y)+1: yêx). Ved hjelp av (0) følger da (Az)(zêQ –> Ord(z)). Fra dette og definisjonen av Rang følger Rang(x)=UN(Q). Men da har vi Ord(Rang(x)) i lys av et tidligere teorem vi har vist.

Ad (ii): Dette bevises ved induksjon på <-relasjonen mellom ordinaltall. Anta (Ab) (b<a –> b=Rang(b)). Nå har man ved hjelp av induksjonshyotesen:

Rang(a) = UN(Mg(Rang(y)+1: yêa) = UN(Mg(b+1: b<a)
= Sup(Mg(b+1: b<a) = Sup(a+1) = a (Teorem 4.2)

Dette viser at påstanden holder.

Ad (iii): Anta xêy. Man har:

Rang(y) = UN(Mg(Rang(x)+1: xêy)) = UN(Mg(z: (Ex)(z= Rang(x)+1 & xêy))).

Siden Ord(Rang(x)) og Ord(Rang(y)) er det klart at Rang(x)ê(Rang(x)+1) og derfor at Rang(x)ê Rang(y). Men da Rang(x) < Rang(y). **Q.E.D.**

Vi definerer V(a) der a er et ordinaltall ved transfinit induksjon slik:

(+) V(a) = UN/b<a/(Pt(V(b)))

Denne definisjonen kan rettferdigjøres ved hjelp av Teorem 5.4. Definer:

G(H,x,y) <–> (y =UN/z<x/(Pt(H(z)) & Ord(x))

Da må man ha i lys av Teorem 5.4:

V(a) = G*< Rest(V, <;-1"{a}),a>
= UN/b<a/(Pt(Rest(V, Mg(b: b<a))‘b))
= Mg(z: (Eb)(b<a & zêPt(Rest(V, Mg(b: b<a)) ‘b)))
= Mg(z: (Eb)(b<a & zêPt(V(b))))

= UN/b<a/(Pt(V(b))).

Vi skal nå gi bevis for den følgende sats om det kumulative hierarkiet <V(a)>/aêOn/ (der On = Mg(x: Ord(x))):

Teorem 5.6 (ZFC) (i) Trans(V(a))
(ii) V(a+1) = Pt(V(a))
(iii) Lim(c) –> V(c) = UN/b<c/(V(b))
(iv) xêV(a) <–> Rang(x) <a
(v) (Ax)((Ea)(xêV(a)))

Bevis: Ad(i): Det bevises ved induksjon på mengen av ordinaltall. Anta: (0) (Ab)(b<a –> Trans(V(b))). Anta dessuten for vilkårlige x,y at (1) xêyêV(a). Fra dette følger at yêUN/b<a/(Pt(V(b))). Herav kan man slutte yêPt(V(b)) for noe b<a. Det følger at y Inkl V(b) og derfor ved hjelp av (1) at: (2) xêV(b). Etter induksjonshypotesen er V(b) transitiv. Fra dette og (2) kan man slutte at x Inkl V(b) og derfor xêPt(V(b)). Det følger at xêV(a) = UN/b<a/(Pt(V(b))). Dette viser at V(a) er transitiv.

Ad (ii): Siden V(a) er transitiv for alle aêOn= Mg(x: Ord(x)) har vi at V(a) Inkl Pt(V(a)). Derfor:

V(a+1) = UN/b<(a+1)/(Pt(V(b)))
= UN/b<a/(Pt(V(b))) U Pt(V(a))
= V(a) U Pt(V(a)) = Pt(V(a)).

Ad (iii): Anta Lim(c). Da har man (1) c≠0 &(Ay)(yêc –> y+1êc). Fra dette har man (2) V(c) = UN/d<c/(Pt(V(d))) = Mg(x: (Ed)(d<c & xêPt(V(d)))). Anta nå xêV(c). Da har man følgelig at xêPt(V(d)) for noe d<c. Dette siste innebærer dêc og derfor i lys av (1) at (d+1)<c. Men ifølge det som ble bevist under (ii) har man at V(d+1)= Pt(V(d)). Det må derfor (Es)(s<c & xêV(s)). Men dette innebærer at xêUN/b<c/(V(b)). Er på den annen side xêUN/b<c/(V(b)) følger det at xêV(b) for noe b der b<c. Siden V(b) er transitiv følger da at x Inkl V(b) og derfor xêPt(V(b)). Men da xêUN/b<c/(Pt(V(b))) = V(c). Dette viser at punkt (iii) holder.

Ad (iv): Vi beviser først kondisjonalen mot høyre. Vi bruker her <-induksjon. Anta xêV(a). Da har man at xêPt(V(b)) for noe b der (1) b<a. Følgelig har man x Inkl V(b). Ved hjelp av induksjonshypotesen har man da:

(Ay)(yêx –> Rang(y)<b). Herav har man at (Ay)(yêx –> (Rang(y)+1) ≤b<a) i lys av (1). Men (2) Rang(x) = UN(Mg(Rang(y)+1: yêx)). Det følger ved hjelp av Teorem 4.2 at Rang(x)<a.

Vi gir så et bevis for kondisjonalen mot venstre. Vi bruker induksjon på ê. Anta Rang(x)<a. Nå har man fra det forrige teoremet at

(Ay)(yêx –> Rang(y)<Rang(x)). Nå skal satsen ifølge induksjonshypotesen holde for alle yêx. Dette innebærer at (Ay)(yêx –> yêV(Rang(x)). Herav følger: x Inkl V(Rang(x)). Men da xêPt(V(Rang(x))). Men siden Rang(x)<a følger xêV(a).

Ad (v): I lys av det vi viste under forrige punkt har man at (Ax)(Ea)(xêV(a)) er ekvivalent med (Ax)(Ea)(Rang(x)<a). La x være et vilkårlig objekt. Da har man Ord(Rang(x), men også at Rang(x)<(Rang(x)+1). Dette impliserer at (Ea)(Rang(x)<a).

Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

*

Referanser

*

Referanser

Carnap [1]	Carnap, Rudolf. *Meaning and Necessity*. Chicago: Chicago University Press, 1956.
Chellas [1]	Chellas, Brian. *The Logical Form of Imperatives.* California: Perry Lane Press Standford, 1969.
Church [1]	"A Formulation of The Logic of Sense and Denotation". In *Structure, Method and Meaning* (edited by P. Henle, M. Kallen and S.K. Langer), pp. 3 –24, New York, 1951.
Cresswell [1]	Cresswell, M.J. *Logics and Languages.* London: Methuen and Co. Ltd., 1973
Drake [1]	Drake, Frank R. Set Theory. *An Introduction to Large Cardinals.* Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1974
Frege [1]	Frege, Gottlob. "Über Sinn und Bedeutung". In *Readings in Philosophical Analysis* (edited by H. Feigl and W. Sellars), New York: Appleton Century Crofts, 1949.
Gabbay [1]	Gabbay, Dov M. "Craigs interpolation theorem for modal logics" In *Conference in Mathematical Logic'70*, Berlin: Springer Verlag, 1970
Hintikka [1]	Hintikka J. *Models for Modalities.* Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1969
Hintikka [2]	Hintikka J. *Knowledge and Belief.* Ithaca: Cornell University Press, 1962
Hughes & Cresswell [1]	Hughes, G.E. and Cresswell, M.J. *An introduction to modal logic.* London: Methuen and Co. Ltd., 1968. (Reprinted with corrections 1972)
Kanger [1]	Kanger, Stig. *Provability in Logic.* Stockholm: Almquist og Wiksell, 1957
Kanger [2]	Kanger, Stig. "The Morning Star Paradox". *Theoria* 23 (1957), 7–11
Kripke [1]	Kripke, Saul A. "Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi". *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 9 (1963), 67–96
Kripke [2]	Kripke, Saul A. "Semantical analysis of modal logic II. Non-normal modal propositional calculi". In The Theory of Models (Edited by Addison, Henkin and Tarski), pp 206–220. Amsterdam, 1965
Kripke [3]	Kripke, Saul A. "Semantical considerations on modal logic". *Acta Philosophica Fennica* 16 (1963) 83–94
Lemmon [1]	Lemmon, E. J. (in collaboration with Dana Scott) *The 'Lemmon notes': an introduction to modal logic* (edited by Krister Segerberg) *American philosophical quarterly* Monograph Series (edited by Nicholas Rescher), no. 11. Oxford: Basil Blackwell, 1977.
Montague [1]	Montague, Richard. "Universal Grammar". *Theoria* 36 (1970), 373–398

Montague [2]	Montague, Richard. "Pragmatics and Intensional Logic". *Synthese* 22 (1970), 68–94
Sahlqvist [1]	Sahlqvist, Henrik. "Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic". Cand. real. thesis, University of Oslo, 1973.
Sahlqvist [2]	Sahlqvist, Henrik. "A note on irreflexive, asymmetric and intransitive Kripke models". Preprint Series, Institute of Mathematics,University of Oslo, no.11, April 1972.
Scott [1]	"Advice on Modal Logic". In *Philosophical Problems in Logic Recent Developments* (edited by Karel Lambert), pp. 143 –173, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1974.
Scott [2]	Scott, Dana. "A Logic of Commands", Mimeographed, Standford University, April 1968.
Scott [3]	Scott, Dana. "Formalizing Intensional Notions", Mimeographed, Standford University, April 1968.
Scott [4]	Scott, Dana. "An Outline for Quantified Intensional Logic", Mimeographed, Standford University, June 1967.
Scott [5]	Scott, Dana. "The Logic of Tenses", Mimeographed, Standford University, December 1965.
Segerberg [1]	Segerberg, Krister. *An essay in classical modal logic*. 3 vols. Uppsala: University of Uppsala, 1971.
Shoenfield [1]	Shoenfield, Joseph. *Mathematical Logic.* London: Addison-Wesley, 1967.
Takeuti & Zaring [1]	Takeuti, G. and Zaring, W. M. *Introduction to Axiomatic Set Theory.* Berlin: Springer Verlag, 1971.
Takeuti & Zaring [1]	Takeuti, G. and Zaring, W. M. *Axiomatic Set Theory.* Berlin: Springer Verlag, 1973.
Tarski [1]	Tarski, Alfred. *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938* (translated by J.H. Woodger) Oxford: Clarendon Press, 1956.
Tarski [2]	Tarski, Alfred. "Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences". In *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938* (translated by J.H. Woodger) Oxford: Clarendon Press, 1956.
Thomason [1]	Thomason, S.K. "Semantical analysis of tense logics", *Journal of Symbolic Logic* 37 (1972).
Thomason [1]	Thomason, S.K. "An incompleteness theorem in modal logic", *Theoria* 60 (1974), 30–34.